抛物问题
GALERKIN有限元法

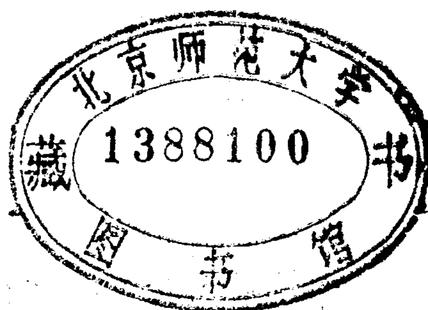
（瑞典）韦达·托梅 著
黄明游
刘海楼 译

吉林大学出版社

抛物问题
GALERKIN 有限元法

(瑞典) 韦达·托梅 著

黄明游
刘海楼 译



吉林大学出版社

抛物问题
GALERKIN有限元法

(瑞典)韦达·托梅 著
黄明游
刘海楼 译

*

吉林大学出版社出版 吉林省新华书店发行
长春市第九印刷厂印刷

*

787×1092 32开 8.25印张 185,000字
1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷
印数：1—1,500册

统一书号：13323·2 定价：1.70元

内 容 介 绍

本书共分十四章，它系统、完整地阐述了抛物问题的有限元法及其数学理论。书中论及的有限元法包括 Galerkin 法、H^{-1} 方法、混合法 质量集中法以及简单的和基于 Padé 逼近的时间离散化方法；既讨论了光滑初值问题，也讨论了非光滑初值问题，还涉及到非线性和奇型的抛物问题；深入、细致地介绍了在L_2模、L_∞模以及负模意义下分析有限元法收敛性和建立理论误差估计的方法、技巧。

这本书具有由浅入深、内容新颖精炼的特点，可作为有关专业高年级学生和研究生课的教材，也是一本普及、提高有限元理论方法的很好的读物和参考书，可供具有大学数学水平的教师、研究生、科学工作者以及工程技术人员阅读。

序　言

本书的宗旨是，以一个基本自给自足的形式，给出应用于抛物问题的Galerkin有限元法的数学概述。书内论题的选择并不表示详尽无遗，只能说是充分反映了著者近十多年来在这个领域内的工作。

本书的目的主要是适宜教学，所以，重点放在一些典型问题分析的思路和方法上，而不去纠缠方法的每个细节。本书总结了抛物问题有限元法的最近发展，对于所列的每个论题的更完整结果，给读者介绍了可参考的文献。

由于对抛物问题的Galerkin方法的陈述和分析、一般都基于相应的定常问题的结果，所以为了完整起见，在本书的内容中也包含了一些必要的椭圆问题的结果。

下边是本书内容的概要.

在作为导言的第一章里，我们针对有界域上，带有第一类齐次边界条件的热传导方程的典型初边值问题，考虑了最简单的Galerkin有限元法。我们采用了问题的标准弱形式，并且，首先用分片线性函数，然后再用更一般的分片多项式，去近似在区域的边界上满足齐次条件的函数。我们以这样的典型问题为例，给出了在能量和平方平均度量下的基本误差估计式。这里首先针对由单独离散空间变量所得到的半离散问题进行讨论，然后再对由进一步离散时间变量所得的通常的全离散格式进行讨论。

在紧接着的五章里，我们讨论了半离散近似情形的结果的某些扩展和推广，并给出了在一些不同度量下的误差估

计．首先，在第二章里，用椭圆问题的近似解算子表示半离散问题，这时不要求近似函数满足齐次边界条件．基于椭圆问题非标准弱陈述的Nitsche半离散方法，被选作为这样的一个例子．在第三章里，对齐次热传导方程情形，给出了更精确的误差估计．此时对于相应给定初值的解的光滑性，要求一个准确的描述，即是用本书中反复用到的函数空间$\dot{H}^s(\Omega)$来表达，这个空间照顾到了其构成元素的光滑性和边界状况两方面的要求，我们同时证明了，半离散解算子对正的时间有类似于连续情形的光滑性质．并且，作为一个推论，证明了甚至当初值不光滑时，有限元解也有足够的收敛阶．在第四章中，将第二、第三章的结果推广到更一般的抛物方程．在第五章，对于一个简单情形，导出了一些按最大模的先验界和误差估计．在第六章，证明了一些负模估计，对一些情形同时证明了在特定点上收敛性（超收敛）的有关结果．

在其次的三章里，我们讨论了半离散问题的时间离散化．首先，在第七章里，研究了齐次热传导方程，并且对光滑和非光滑初值的两种情形给出了类似于前边的结果．这里讨论了对时间离散化的单步型方法，并且这种方法依赖于指数函数的有理逼近，标准的Euler方法和Crank-Nicolson格式作为特例．在第八章里，我们研究了非齐次热传导方程的全离散单步方法，这些方法在每个时间步要计算右端项在一固定的有限个点上的值．在第九章，我们应用Galerkin方法进行时间变量的离散化，在时间变量方向上寻求分片多项式形式的离散解．此时解在节点处可以是不连续的，时间方向的剖分也不一定是均匀的．在此方法中，右端项是取积分形式，而不是取在有限个点上的值．

在第十章里，讨论了标准 Galerkin 方法对非线性抛物方程的应用。给出了半离散问题的误差估计，其次我们特别关心的是，关于未知函数是线性的按时间步进的格式的陈述和分析。

在接着的三章里，我们考虑了标准 Galerkin 方法的各种变形。第十一章分析了所谓质量集中方法。在某些情形下，这种方法符合极大值原理。第十二章讨论了 H^1 和 H^{-1} 方法。其中第一个是基于一个 H^1 内积弱陈述的 Galerkin 方法，而第二个方法是使用了分别取自不同有限维空间的试探函数和检验函数。第十三章的逼近格式，是基于初边值问题的一个混合陈述。这时，解本身和它的梯度是分别在不同的空间里寻找。

最后的第十四章，考虑了一个奇型问题，这个问题是由 R^3 中一个球内的球对称问题通过极坐标变换得到的，我们将分别地讨论基于不同内积所定义的两种不同弱陈述的 Galerkin 方法。

在每章末尾都列出了参考文献。定理、引理和公式在每一章都是独立地编号，当不同章涉及同一文献时，在不同章分别列出。

这本书是在我多次授课的基础上形成的。其中包括我于 1977 年在澳大利亚 Queensland 大学、1980 年在法国巴黎第Ⅵ大学和 1982 年在中国吉林大学的讲学，当然，也包括我多年来在我所属大学——Chalmers 技术大学（瑞典哥德堡）所进行的教学。我愿意向我在这些大学里的学生和同事们表示感谢，感谢他们给予我的鼓励。我在这个领域内的大多数工作，是与 Cornell 大学（美国）的 J.H.Bramble, A.H.Schatz 和 L.Wahlbin 十余年来的合作密切相关的，所

以，在这里我愿意对他们的志同道合的合作表示谢意。同时也感谢美国国立科学基金会，在12个夏季期间对上述合作所给予的支持。

最后，我感谢 Stig Larsson 和聂义勇，他们仔细地阅读了整个书稿，并提出过许多改进的意见。还感谢 Boel Engebrand，是她如此熟练地打印了此书。

韦达。托梅

于哥德堡，1983年12月

目　录

第一章 标准GALERKIN方法

在作为引言的这一章里，我们考虑求热传导方程初边值问题近似解的标准 Galerkin 方法。

设 Ω 是 R^d 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的区域，考虑初边值问题

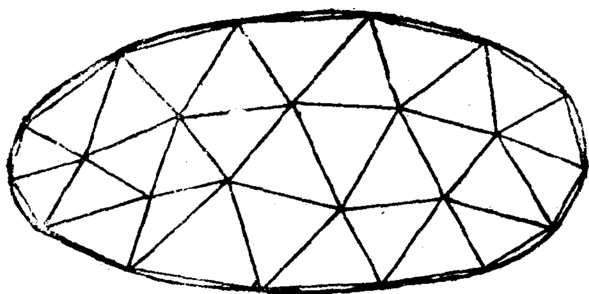
$$(1)\quad u_t - \Delta u = f,\quad 于\ \Omega\times[0,\infty)内,$$
$$u = 0,\quad 在\ \partial\Omega\times[0,\infty)上,$$
$$u(x,0) = v(x),\ 于\ \Omega\ 内,$$

这里 u_t 表示 $\partial u/\partial t$. $\Delta = \sum_1^d \partial^2/\partial x_i^2$ 是 Laplace 算子。首先我们想用这样一个函数 $u_h(x,t)$ 去逼近 $u(x,t)$，对于每一个固定的 t，$u_h(x,t)$ 作为 x 的函数属于具有某种逼近性质的有限维线性空间 S_h。这个函数将是一个有限常微分方程组的解，被称之为半离散解。然后，再将方程(1)按时间变量进一步离散化，由此即可得到求问题(1)近似解的全离散格式。

在讨论微分方程问题之前，我们简单地介绍一下关于在 Ω 内光滑、在边界 $\partial\Omega$ 上为零的函数的逼近问题。为了具体起见，我们以平面凸域上分片线性函数去作逼近为例。

设 $\mathcal{T}_h$ 表示 Ω 的由互不相交三角形 τ 组成的三角剖分，其中任一三角形的顶点都不落在另外三角形的边的内部，并且所有三角形的并集所确定的多边形域 $\Omega_h\subset\Omega$，其边界顶点落在 $\partial\Omega$ 上（见图）。

设 h 表示剖分 $\mathcal{T}_h$ 中单元的最大边长。那么，h 是一个参数，它随着剖分的细密化而减小。我们将假定剖分中所



有的角有与 h 无关的下界，并且还常常假定剖分在下述意义下是拟一致的，即 $\mathscr{T}_h$ 中所有三角形的大小基本一致，这可以由要求 $\mathscr{T}_h$ 中的 τ 的面积有下界 Ch^2 来表达，其中 $C>0$ 与 h 无关。

现在用 S_h 表示在 Ω 的闭集 $\bar{\Omega}$ 上连续，在 $\mathscr{T}_h$ 中每个三角形内是线性的，并在 Ω_h 外为 0 的所有函数。设 $\{P_j\}_1^{N_h}$ 是 $\mathscr{T}_h$ 的内顶点，则 S_h 中的任一个函数由它在点 P_j 处的值唯一确定，且依赖于 N_h 个参数。令 φ_j 是 S_h 中在 P_j 点取值 1，而在其它顶点取值为 0 的"锥形函数"，则 $\{\varphi_j\}_1^{N_h}$ 形成 S_h 的一个基底，且 S_h 中每一个 χ 均可表成

$$\chi(x)=\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j\varphi_j(x),\text{其中 }\alpha_j=\chi(P_j).$$

对于给定的一个在 Ω 上光滑，而在 $\partial\Omega$ 上为 0 的函数 v，作为此函数的一个逼近，例如，可以取它在 S_h 中的插值 I_hv，I_hv 是通过要求它在内顶点上与 v 取值一致即 $I_hv(P_j)=v(P_j)$，$j=1,\cdots,N_h$，来确定的。我们需要关于这种插值的误差的一些结果。

以下，$\|\cdot\|$ 表示 Ω 上 L_2 模或平均平方模，$\|\cdot\|_r$ 表示

Sobolev 空间 $H^r(\Omega)=W_2^r(\Omega)$的模。这样，对于实值函数 v，

$$\|v\|=\left(\int_\Omega v^2dx\right)^{1/2},$$

和对于正整数 r，

$$\|v\|_r=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant r}\|D^\alpha v\|^2\right)^{1/2},$$

其中$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$，而$D^\alpha=(\partial/\partial\chi_1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial\chi_d)^{\alpha_d}$表示关于$x$的$|\alpha|=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i$阶任意导数.因此，上述和式包含$v$ 的所有阶数不超过 r 的导数，我们知道，对于 $H_0^1(\Omega)$中的函数v，即 v 和 $\nabla v=\text{grad}v$ 属于$L_2(\Omega)$，并且在$\partial\Omega$上v取值为 0，$\|\nabla v\|$与$\|v\|_1$为等价模。

众所周知，对于刚才所定义的插值函数，如下之误差估计成立。即有

$$\|I_hv-v\|\leqslant Ch^2\|v\|_2,$$

和

$$\|\nabla I_hv-\nabla v\|\leqslant Ch\|v\|_2.$$

这里，正象我们以后总是这样认为的那样，不等式的陈述本身就假定了v足够的光滑，以使右端的模为有限。

现在来讨论 R^d 中更一般区域的情形。假设给定了$H_0^1(\Omega)$的一族有限维子空间 $\{S_h\}$，使对某一整数 $r\geqslant2$ 和充分小的 h，

$$\inf_{\chi\in S_h}\{\|v-\chi\|+h\|\nabla(v-\chi)\|\}\leqslant Ch^s\|v\|_s,\tag{2}$$

$$1\leqslant s\leqslant r,\qquad v\in H^s(\Omega)\cap H_0^1(\Omega).$$

前面那个分片线性函数的例子，相当于 $d=r=2$。对于一般情形象(2)这样的估计，常常可以利用 S_h 上的插值算子 I_h

（3） $\|I_h v - v\| + h\|\nabla(I_h v - v)\| \leqslant Ch^s\|v\|_s$,

$$1\leqslant s\leqslant r,$$

来得到。对于 $\partial\Omega$ 是曲线和 $r>2$ 的情形，在边界附近存在困难，但上面的估计式，原则上可以通过映射曲边三角形为一个直边三角形（等参元）来证明。对此，我们不作详细的论述。

在假设(2)之下，逼近于函数和它的梯度的最佳逼近阶分别是 $O(h^r)$ 和 $O(h^{r-1})$。相应地对于热传导方程的解，下面我们试图得到上述逼近阶的近似解。

为了定义初边值问题(1)的最佳阶逼近解，首先把初边值问题写成弱形式：用在 $\partial\Omega$ 上为0的光滑函数 φ 乘热传导方程，在 Ω 上积分，并对第二项应用 Green 公式，这样对所有如此之 φ 得到

$$(u_t, \varphi) + (\nabla u, \nabla\varphi) = (f, \varphi),\ t\geqslant 0,$$

这里 (v, w) 表示 $L_2(\Omega)$ 中的内积 $\int_\Omega vw\,dx$。

然后可以设立这样的近似问题：对于每一个 t，寻求 $u_h(t)\in S_h$，使得

（4） $(u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla\chi) = (f, \chi)$,

对 S_h 中所有 χ，$t\geqslant 0$，和初始条件

$$u_h(0) = v_h,$$

此处 v_h 是 v 在 S_h 中的某种近似。由于我们只对空间变量进行离散化，故所得问题叫做半离散问题。以后，为得到全离散格式，我们将把问题对时间变量进一步离散化。

用 S_h 的基底 $\{\varphi_j\}_1^{N_h}$，半离散问题可叙述成：寻求表示式

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t)\varphi_j(x)$$

中的系数 $\alpha_j(t)$，使得

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j'(t)(\varphi_j, \varphi_k) + \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t)(\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_k) = (f, \varphi_k),$$

$$k = 1\cdots, N_h,$$

和

$$\alpha_j(0) = \gamma_j, \quad j = 1, \cdots, N_h,$$

其中 γ_j 为给定的初始近似 v_h 的分量。利用矩阵记号，这可以表示成

$$A\alpha'(t) + B\alpha(t) = \tilde{f}, t \geqslant 0, \text{且}\ \alpha(0) = \gamma,$$

其中$A = (a_{jk})$ 是以 $a_{jk} = (\varphi_j, \varphi_k)$为元素的质量矩阵，$B = (b_{jk})$是刚度矩阵，$b_{jk} = (\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_k)$，$\tilde{f} = (f_k)$是向量，$f_k = (f, \varphi_k)$，$\alpha(t)$是以$\alpha_j(t)$为分量的未知向量，$\gamma = (\gamma_k)$。它们的维数都等于 S_h 的维数 N_h。

因为质量矩阵 A 是 Gram 矩阵，特别地，它是正定可逆的，上述常微分方程组可以写成

$$\alpha'(t) + A^{-1}B\alpha(t) = A^{-1}\tilde{f}, \ t \geqslant 0, \ \alpha(0) = \gamma.$$

显然，对于正的t，它有唯一解。

我们将证明半离散问题的解与连续问题解之间，有如下误差估计。

定理 1． 设 u_h 和 u 分别是(4)和(1)的解，则

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leqslant \|v_h - v\| + Ch^r\left\{\|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds\right\}, t \geqslant 0.$$

当然，这里要求连续问题的解具有出现在右端的模所隐含的正则性，并且要求 v 在 $\partial\Omega$ 上为 0。再注意，如果(3)成立，且 $v_h = I_h v$，则右端第一项可用第二项控制。若 $v_h = P_0 v$，这里 $P_0 v$ 是 v 到 S_h 上的 L_2—投影，则此论断仍然成立，因为这样选取的v_h，是 v 在 S_h 中关于 L_2模的最好的逼近。此种最佳阶逼近的 v_h 的另一种选择是将在下面定

义的投影。

为了证明定理1，引进S_h上的所谓椭圆或Ritz投影P_1，它是关于内积$(\nabla v, \nabla w)$的正交投影，因此，

(5) $(\nabla P_1 u, \nabla \chi) = (\nabla u, \chi)$, $\chi \in S_h$.

实际上，$P_1 u$是相应的椭圆问题解u的有限元逼近。从已有的椭圆问题的误差分析中，我们引用如下的误差估计。

引理1。对由(5)定义的P_1，有

$$\|P_1 v - v\| + h\|\nabla(P_1 v - v)\| \leqslant Ch^s \|v\|_s, \quad 1 \leqslant s \leqslant r,$$
$$v \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

证明。先估计梯度项，利用(5)，有

$\|\nabla(P_1 v - v)\|^2 = (\nabla(P_1 v - v), \nabla(P_1 v - v)) =$
$(\nabla(P_1 v - v), \nabla(\chi - v)) \leqslant \|\nabla(P_1 v - v)\| \|\nabla(\chi - v)\|$，因此由(2)，

$$\|\nabla(P_1 v - v)\| \leqslant \inf_{\chi \in S_h} \|\nabla(\chi - v)\| \leqslant Ch^{s-1} \|v\|_s.$$

对于L_2模估计，下面用对偶论证方法。设φ是$L_2(\Omega)$中任意函数，取$\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$为

$-\Delta\psi = \varphi$，在Ω内，$\psi = 0$，在$\partial\Omega$上，

的解。注意到先验不等式

$$\|\psi\|_2 \leqslant C\|\Delta\psi\| = C\|\varphi\|,$$

则有

$$\begin{aligned}(P_1 v - v, \varphi) = -(P_1 v - v, \Delta\psi) &= (\nabla(P_1 v - v), \nabla\psi) \\ &= (\nabla(P_1 v - v), \nabla(\psi - P_1\psi)) \\ &\leqslant \|\nabla(P_1 v - v)\| \|\nabla(\psi - P_1\psi)\| \\ &\leqslant Ch^{s-1}\|v\|_s \cdot h\|\psi\|_2 \leqslant Ch^s \|v\|_s \|\varphi\|,\end{aligned}$$

若选取$\varphi = P_1 v - v$，即完成引理的证明。

现在来证明定理1。主要的一步是比较半离散问题的解和精确解的椭圆投影。令

(6) $u_h - u = (u_h - P_1 u) + (P_1 u - u) = \theta + \rho$.

第二项由引理 1 容易估计，并有明显的估计式：

$$\|\rho(t)\| \leqslant Ch^r \|u(t)\|_r = Ch^r \|v + \int_0^t u_t ds\|_r$$

$$\leqslant Ch^r \left\{ \|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds \right\}.$$

为了估计 θ，注意到

(7) $$(\theta_t, \chi) + (\nabla\theta, \nabla\chi) = (u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla\chi) - (P_1 u_t, \chi) - (\nabla P_1 u, \nabla\chi)$$
$$= (f, \chi) - (P_1 u_t, \chi) - (\nabla u, \nabla\chi)$$
$$= (u_t - P_1 u_t, \chi),$$

或者

(8) $(\theta_t, \chi) + (\nabla\theta, \nabla\chi) = -(\rho_t, \chi), \chi \in S_h$.

上述推演中，我们利用了 P_1 的定义以及 P_1 与时间微分可交换这个不难确立的事实。由于 θ 属于 S_h，在(8)中可以选取 $\chi = \theta$，并得到

(9) $(\theta_t, \theta) + \|\nabla\theta\|^2 = -(\rho_t, \theta)$.

由于第一项等于$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2$，而第二项是非负的，故得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 \leqslant \|\rho_t\| \|\theta\|.$$

于是有

$$\frac{d}{dt}\|\theta\| \leqslant \|\rho_t\|,$$

积分以后，得到

$$\|\theta(t)\| \leqslant \|\theta(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\| ds.$$

这里

$$\|\theta(0)\| = \|v_h - P_1 v\| \leqslant \|v_h - v\| + \|P_1 v - v\| \leqslant \|v_h - v\|$$
$$+ Ch^r \|v\|_r,$$

而

$$\|\rho_t\| = \|P_1 u_t - u_t\| \leqslant Ch^r \|u_t\|_r,$$

综合这些估计式，定理得证。

在上面的证明里，我们用到了(9)中 $\|\nabla\theta\|^2$ 是非负的事实。对于这一项作稍许细致地处理，可以证明，初值对误差的影响随 t 的增加按指数形式趋于0。实际上，若令 λ_1 为 $-\Delta$ 带有 Dirichlet 边界值的最小特征值，

则有

$$\|\nabla\chi\|^2 \geqslant \lambda_1 \|\chi\|^2, \quad \chi \in S_h.$$

从而由(9)推出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 + \lambda_1 \|\theta\|^2 \leqslant \|\rho_t\| \|\theta\|,$$

或者

$$\frac{d}{dt}\|\theta\| + \lambda_1 \|\theta\| \leqslant \|\rho_t\|,$$

于是

$$\|\theta(t)\| \leqslant e^{\lambda_1 t}\|\theta(0)\| + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)}\|\rho_t(s)\| ds$$
$$\leqslant e^{\lambda_1 t}\|v_h - v\| + Ch^2\left\{e^{-\lambda_1 t}\|v\|_2\right.$$
$$\left.+ \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)}\|u_t(s)\|_2 ds\right\}.$$

由于

$$\|\rho(t)\| \leqslant Ch^2 \|u(t)\|_2$$

我们结论

$$\|u_h(t) - u(t)\|$$

$$\leqslant e^{-\lambda_1 t}\|v_h - v\| + Ch^2\Big\{e^{-\lambda_1 t}\|v\|_2 + \|u(t)\|_2$$

$$+\int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)}\|u_t(s)\|_2 ds\Big\}.$$

我们将不去追求这种 t 充分大情形的分析。

下面，简单地来考察一下证明定理1的另一种途径，此途径是借助算子形式的 θ 方程。为此引进"离散 Laplace 算子 Δ_h，它被看作是由 S_h 到 S_h 的算子，并由下式所定义

$$(\Delta_h\psi, \chi) = -(\nabla\psi, \nabla\chi), \quad \psi, \chi \in S_h.$$

显然，用这个类似于 Green 公式的关系式可以完全确定 $\Delta_h\psi = \sum_{j=1}^{N_h} d_j\varphi_j$。这是由于 $\{d_j\}_1^{N_h}$ 满足

$$\sum_{j=1}^{N_h} d_j(\varphi_j, \varphi_k) = -(\nabla\psi, \nabla\varphi_k), \quad k = 1, \cdots, n_h,$$

以及这个方程组的系数矩阵是我们前边遇到的正定的质量矩阵。容易看出算子 Δ_h 是自共轭的，$-\Delta_h$ 是正定的。注意，Δ_h 同前面引用的其他算子具有如下关系

$$(10) \quad \Delta_h P_1 = P_0\Delta.$$

这是因为对于 $\chi \in S_h$，

$$(\Delta_h P_1 v, \chi) = -(\nabla P_1 v, \nabla\chi) = -(\nabla v, \nabla\chi)$$
$$= (\Delta v, \chi) = (P_0\Delta v, \chi).$$

现在，半离散方程可以写成：

$$(u_{h,t}, \chi) - (\Delta_h u_h, \chi) = (P_0 f, \chi), \quad \chi \in S_h.$$

由于所有的左部内积因子都在 S_h 中，所以有

$$u_{h,t} - \Delta_h u_h = P_0 f.$$

利用(10)，关于 θ 可以得到

$$\theta_t - \Delta_h\theta = (u_{h,t} - \Delta_h u_h) - (P_1 u_t - \Delta_h P_1 u)$$
$$= P_0 f + (P_0 - P_1)u_t - P_0(u_t - \Delta u) = P_0(I - P_1)u_t$$

$$= -P_0\rho_t,$$

即

(11) $\theta_t - \Delta_h\theta = -P_0\rho_t$.

让我们用 $E_h(t)$来表示齐次半离散方程

$$u_{h,t} - \Delta_h u_h = 0, \quad t\geqslant 0,$$

的解算子，也就是说，在时刻 t 它将初值$u_h(0)=v_h$ 变换为解 $u_h(t)$,所以 $u_h(t)=E_h(t)v_h$.(这个算子也可认为是由 $-\Delta_h$生成的半群。)由Duhamel原理可知，非齐次方程(11)的解为

$$\theta(t)=E_h(t)\theta(0)-\int_0^t E_h(t-s)P_0\rho_t(s)ds.$$

注意在 L_2 中 $E_h(t)$是稳定的，或更确切地说，

$$\|E_h(t)v_h\|\leqslant\|v_h\|, \quad v_h\in S_h, \quad t\geqslant 0.$$

事实上，在(4)的齐次式中取 $\chi=u_h$,有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h\|^2+\|\nabla u_h\|^2=0.$$

由于第二项是非负的，所以第一项非正，从而 $\|u_h\|^2$ 是非增加的，由此稳定性得证。显然，在 L_2 中 P_0 的模等于1，所以有

$$\|\theta(t)\|\leqslant\|\theta(0)\|+\int_0^t\|\rho_t(s)\|ds.$$

象前边一样，由此即可证明定理。上述关于 θ 的估计，是从 $E_h(t)$的稳定性估计和对 $\rho_t=(P_1-I)u_t$ 应用椭圆问题误差估计推演出来的。

用类似的方法，可以证明关于误差的梯度的如下估计。

定理2. 在定理1的假设下，对于 $t\geqslant 0$,则有

$$\|\nabla u_h(t)-\nabla u(t)\|\leqslant C\|\nabla v_h-\nabla v\|+Ch^{r-1}\Big\{\|v\|_r$$

$$+\|u(t)\|_r+\left(\int_0^t\|u_t\|^2_{r-1}ds\right)^{1/2}\Bigg\}.$$

证明。象以前一样，将误差写成(6)的形式。

利用引理1，

$$\|\nabla\rho(t)\|=\|\nabla(P_1u(t)-u(t))\|\leqslant Ch^{r-1}\|u(t)\|_r.$$

为了估计 $\nabla\theta$，再次利用(8)式。现在取 $\chi=\theta_t$，得到

$$\|\theta_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2=-(\rho_t,\theta_t)\leqslant\frac{1}{2}\|\rho_t\|^2$$

$$+\frac{1}{2}\|\theta_t\|^2,$$

于是

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|^2\leqslant\|\rho_t\|^2,$$

或者

$$\|\nabla\theta(t)\|^2\leqslant\|\nabla\theta(0)\|^2+\int_0^t\|\rho_t\|^2ds$$

$$\leqslant(\|\nabla(v_h-v)\|+\|\nabla(P_1v-v\|)^2+\int_0^t\|\rho_t\|^2ds.$$

因此，根据引理1

$$\|\nabla\theta(t)\|^2\leqslant C\|\nabla(v_h-v)\|^2+Ch^{2r-2}\Big\{\|V\|_r+\int_0^t\|u_t\|^2_{r-1}ds\Big\},\tag{12}$$

至此定理证毕。

注意，如果在(3)中取 $v_h=I_hv$ 或 $v_h=P_1v$，则

$$\|\nabla v_h-\nabla v\|\leqslant Ch^{r-1}\|v\|_r,$$

于是，定理2中不等式右端的第一项可用第二项控制。

关于 $\theta=u_h-P_1u$，我们作如下进一步的考察：假若选 $v_h=P_1v$，则 $\theta(0)=0$，于是除(12)以外，我们还有

$$(13)\quad \|\nabla\theta(t)\| \leqslant C\left(\int_0^t \|\rho_t\|^2 ds\right)^{1/2} \leqslant Ch^r\left(\int_0^t \|u_t\|_r^2 ds\right)^{1/2}$$

即 θ 的梯度为$O(h^r)$，而全部误差的梯度仅是$O(h^{r-1})$，当 h 充分小时。这样，∇u_h 逼近 $\nabla P_1 u$ 较之逼近 ∇u 达到更高的精度。这是有时被称之为超收敛的现象的一个例子。

作为这个估计式应用的一个简单例子，我们简要地说明一下如何用它来证明最大模的几乎最佳误差界。考虑本章开始所描述的那样情形，Ω 是一个凸的光滑平面区域，S_h 是由 Ω 的拟一致剖分上的分片线性函数($d=r=2$)所构成。此时（见下边的第五章）椭圆问题的误差有如下估计

$$\|\rho(t)\|_{L_\infty(\Omega)} = \|P_1 u(t) - u(t)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant Ch^2 \log\frac{1}{h}\, \|u(t)\|_{W_\infty^2(\Omega)}.$$

对二维情形，由 Sobolev不等式，最大模差不多可用 $H^1(\Omega)$ 模控制，并且对子空间 S_h 的函数，可以证明

$$\|\chi\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant C\left(\log\frac{1}{h}\right)^{1/2} \|\nabla\chi\|.$$

应用于 θ 上，由(13)($\gamma=2$ 情形)，这表明

$$\|\theta(t)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant Ch^2\left(\log\frac{1}{h}\right)^{1/2}\left(\int_0^t \|u_t\|_2^2 ds\right)^{1/2},$$

由此可推导出抛物问题的误差估计式

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \|\rho(t)\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\theta(t)\|_{L_\infty(\Omega)}$$
$$\leqslant C(t,u)h^2 \log\frac{1}{h}.$$

现在我们来研究时间变量也离散化的某些简单格式。首先讨论向后的Euler—Galerkin方法。设 k 是时间步长，U^n 是 $u(t)$在 $t=t_n=nk$ 时刻在 S_h 中的近似。这个方法是通过在(4)中用向后差商代替时间导数定义的，若

$\bar{\partial}_t U^n = k^{-1}(U^n - U^{n-1})$，所述方法即

(14) $$(\bar{\partial}_t U^n, \chi) + (\nabla U^n, \nabla \chi) = (f(t_n), \chi), \chi \in S_h,$$
$$U^0 = v_h.$$

据此 U^n 可以由 U^{n-1} 和解下述问题

$$(U^n, \chi) + k(\nabla U^n, \nabla \chi) = (U^{n-1} + kf(t_n), \chi), \chi \in S_h,$$

来确定。注意，用类似于半离散情形的记号，这个方程可以写成

$$(A + kB)\alpha^n = A\alpha^{n-1} + k\tilde{f}(t_n),$$

这里 $A + kB$ 是正定的，特别是可逆的，因此有唯一解。

我们将证明如下误差估计：

定理 3. 对于(14)和(1)的解 U^n 和 u，有

$$\|U^n - u(t_n)\| \leqslant \|v_h - v\| + Ch^r\left\{\|v\|_r + \int_0^{t_n}\|u_t\|_r ds\right\} + k\int_0^{t_n}\|u_{tt}\|ds, \quad n \geqslant 0.$$

证明。 类似于(6)，令

$$U^n - u(t_n) = (U^n - P_1 u(t_n)) + (P_1 u(t_n) - u(t_n)) = \theta^n + \rho^n.$$

象以前一样，有

(15) $$\|\rho^n\| \leqslant Ch^r\|u(t_n)\|_r$$
$$\leqslant Ch^r\left\{\|v\|_r + \int_0^{t_n}\|u_t\|_r ds\right\}.$$

此处，由相当于(7)的计算，可得

$$(\bar{\partial}_t \theta^n, \chi) + (\nabla \theta^n, \nabla \chi) = -(w^n, \chi),$$

其中

$$w^n = P_1 \bar{\partial}_t u(t_n) - u_t(t_n)$$
$$= (P_1 - I)\bar{\partial}_t u(t_n) + (\bar{\partial}_t u(t_n) - u_t(t_n)) = w_1^n + w_2^n.$$

取 $\chi = \theta^n$，有

$$(\bar{\partial}_t \theta^n, \theta^n) \leqslant \|w^n\|\|\theta^n\|,$$

或者

$$\|\theta^n\|^2-(\theta^{n-1},\theta^n)\leqslant k\|w^n\|\|\theta^n\|,$$

于是

$$\|\theta^n\|\leqslant\|\theta^{n-1}\|+k\|w^n\|.$$

反复利用此式，得

$$\|\theta^n\|\leqslant\|\theta^0\|+k\sum_{j=1}^n\|w^j\|\leqslant\|\theta^0\|+k\sum_{j=1}^n\|w_1^j\|+k\sum_{j=1}^n\|w_2^j\|.$$

象以前一样，

$$\|\theta^0\|=\|v_h-P_1v\|\leqslant\|v_h-v\|+Ch^r\|v\|_r.$$

再注意

$$w_1^j=(P_1-I)\ k^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}u_tds=\ k^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(P_1-I)u_tds,$$

因此有

$$k\sum_{j=1}^n\|w_1^j\|\leqslant\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}Ch^r\|u_t\|_rds=Ch^r\int_0^{t_n}\|u_t\|_rds.$$

其次有

$$w_2^j=k^{-1}(u(t_j)-u(t_{j-1}))-u_t(t_j)$$

$$=-k^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})u_{tt}(s)ds,$$

于是

$$k\sum_{j=1}^n\|w_2^j\|\leqslant\sum_{j=1}^n\left\|\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})u_{tt}(s)ds\right\|$$

$$\leqslant k\int_0^{t_n}\|u_{tt}\|ds.$$

综合以上估计，即完成定理的证明。

注意到，由于时间离散化的非对称性，所以向后 Euler—Galerkin 方法在时间方向仅是一阶精度的。

现在来讨论 Crank—Nicolson—Galerkin 方法。

这个格式是在点$t_{n-\frac{1}{2}}=\left(n-\frac{1}{2}\right)k$附近按一种对称方式将半

离散方程离散化形成的，它是一个在时间方向上是二阶精确的方法。更确切地说，是在 S_h 中递推地用

(16) $$(\bar{\partial}_t U^n, \chi) + (\nabla(U^n + U^{n-1})/2, \nabla\chi)$$

$$= \left(f\left(t_n - \frac{1}{2}\right), \chi\right), \quad \chi \in S_h,$$

$$n = 1, 2, \cdots,$$

$$U^0 = v_h$$

来确定 U^n，这时关于 U^n 的方程用矩阵记法可写成

$$\left(A + \frac{1}{2}kB\right)\alpha^n = \left(A - \frac{1}{2}kB\right)\alpha^{n-1}$$

$$+ k\tilde{f}\left(t_{n-\frac{1}{2}}\right),$$

其中的矩阵 $A + \frac{1}{2}kB$ 是正定的。

现在有如下误差估计。

定理 4. 对于(16)和(1)的解 U^n 和 u，$n \geqslant 0$，有

$$\|U^n - u(t_n)\| \leqslant \|v_h - v\| + Ch^r \left\{ \|v\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds \right\}$$

$$+ Ck^2 \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\nabla u_{tt}\|) ds.$$

证明. 首先已知(15)成立，因此只剩下估计 θ^n. 用前边的记号，有

$$(\bar{\partial}_t \theta^n, \chi) + (\nabla(\theta^n + \theta^{n-1})/2, \nabla\chi) = -(\tilde{\omega}^n, \chi), \chi \in S_h,$$

这里

$$\tilde{\omega}^n = (P_1 - I)\bar{\partial}_t u(t_n) + (\bar{\partial}_t u(t_n) - u_t(t_{n-\frac{1}{2}}))$$

$$+ \nabla\left(u(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(u(t_n) + u(t_{n-1}))\right)$$

$$= \tilde{\omega}_1^n + \tilde{\omega}_2^n + \tilde{\omega}_3^n.$$

若在 θ 的方程中取 $\chi=\frac{1}{2}(\theta^n+\theta^{n-1})$，则有

$$\left(\bar\partial_t\theta^n,\frac{1}{2}(\theta^n+\theta^{n-1})\right)\leqslant\frac{1}{2}\|\tilde\omega^n\|(\|\theta^n\|+\|\theta^{n-1}\|),$$

或者

$$\|\theta^n\|^2-\|\theta^{n-1}\|^2\leqslant k\ \|\tilde\omega^n\|(\|\theta^n\|+\|\theta^{n-1}\|),$$

消去公因子以后，可得

$$\|\theta^n\|\leqslant\|\theta^{n-1}\|+\ k\|\tilde\omega^n\|.$$

反复应用这个不等式，推出

$$\|\theta^n\|\leqslant\|\theta^0\|+k\ \sum_{j=1}^{n}(\|\tilde\omega_1^j\|+\|\tilde\omega_2^j\|+\|\tilde\omega_3^j\|).$$

由于 θ^0 的估计如同以前，剩下的只是估计后边的和。这里，象以前一样，

$$\|\tilde\omega_1^j\|=\|(P_1-I)\bar\partial_t u(t_j)\|\leqslant Ch^r k^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|u_t\|_r ds.$$

其次

$$\begin{aligned}\|\tilde\omega_2^j\|&=\|\bar\partial_t u(t_j)-u_t(t_{j-\frac{1}{2}})\|\\&=\frac{1}{2}\ k^{-1}\|\int_{t_{j-1}}^{t_{j-\frac{1}{2}}}(s-t_{j-1})^2u_{ttt}(s)ds\\&\quad+\int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_j}(s-t_j)^2u_{ttt}(s)ds\|\\&\leqslant Ck\ \int_{t_{j-1}}^{t_j}\|u_{ttt}\|ds,\end{aligned}$$

且类似地有

$$\begin{aligned}\|\tilde\omega_3^j\|&=\|\Delta\ \left(u(t_{j-\frac{1}{2}})\ -\frac{1}{2}(u(t_j)+u(t_{j-1}))\right)\|\\&\leqslant Ck\ \int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\Delta u_{tt}\|ds.\end{aligned}$$

所有这些估计式合起来，表明

$$k\sum_{i=1}^{n}(\|\tilde{\omega}_1^i\|+\|\tilde{\omega}_2^i\|+\|\tilde{\omega}_3^i\|)\leqslant Ch^r\int_0^{t^n}\|u_t\|_r ds$$
$$+Ck^2\int_0^{t}(\|u_{ttt}\|+\|\Delta u_{tt}\|)ds,$$

由此定理得证。

参 考 文 献

这一章的材料，现在是标准的；一些早期的参考资料是〔1〕,〔2〕和〔3〕.利用真解的椭圆投影作比较函数的基本思想是在〔4〕中引进的，对有限元空间和椭圆问题的更一般讨论，见〔5〕.

1. J. Douglas. Jr. and T. Dupont, Galerkin methods for parabolic epuations, SIAM J. Numer. Anal. 7, 575—626(1970).
2. H. S. Price and R. S. Varga, Error bounds for Semi—discrete Galerkin approximations of parabolic problems with applications to petroleum reservoir mechanics. Numerical Solution of Field Problems in Continuum Physics. AMS, Providence, R. I., 74—94 (1970).
3. G. Fix and N. Nassif, On finite element approximations in time dependent problems, Numer. Math. 19, 127—135 (1972).
4. M. F. Wheeler, A priori L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations, SIAM J. Nu-

mer. Anal. 10, 723—759 (1973).

5. P. G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North Holland. Amsterdam (1978).

第二章 基于椭圆问题更一般逼近的半离散方法

前边对抛物问题空间离散化的讨论是基于一有限维空间族$\{S_h\}$，那里$S_h \in H_0^1(\Omega)$并对某一$r \geqslant 2$有

$$\inf_{\chi \in S_h} \{\|v-\chi\| + h\|\nabla(v-\chi)\|\} \leqslant Ch^s \|v\|_s, \quad 1 \leqslant s \leqslant r,$$

$$v \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

在一个平面域Ω内，这样一族空间的最一般的例子是，在Ω上连续，在边界$\partial\Omega$上等于0，在Ω的正则三角形剖分的每一个三角形τ_i上是次数不超过$r-1$的多项式函数构成的空间S_h，其中h是τ_i的最大直径。然而，对于$r>2$和带有光滑边界的区域的情形，要上述子空间的函数严格地满足齐次边界条件，一般来说是不可能的。当然，对于椭圆问题这种困难就已经出现，并且也已经给出了各种处理办法。这里仅作为一个例子，考虑由Nitsche给出的如下方法。这种方法将作为我们以后关于抛物问题的讨论的背景。其他例子，将在十三章中讨论。

考虑具光滑边界的平面域Ω上的Dirichlet问题

(1) $-\Delta u = f$，于Ω内，$u=0$，在$\partial\Omega$上。

设$\mathscr{T}_h = \{\tau_i\}_1^{N_h}$是$\Omega$的拟一致三角形剖分，$\max\operatorname{diam} \tau_i \leqslant h$，允许靠近$\partial\Omega$的三角形有一条曲边，并设$S_h$表示在$\bar{\Omega}$上连续，而在每一个三角形$\tau_i$上是次数不超过$r-1$的多项式的函数所构成的有限维线性空间，在$\partial\Omega$上不要求满足任何边界条件。

令

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_{\partial\Omega}\varphi\psi ds,$$

并引进双线性形式

$$N\gamma(\varphi,\psi)=(\nabla\varphi,\nabla\psi)-\langle\frac{\partial\varphi}{\partial n},\psi\rangle-\langle\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial n}\rangle$$
$$+\gamma h^{-1}\langle\varphi,\psi\rangle,$$

其中 γ 是待定的正常数，n 是 $\partial\Omega$ 的外法向量。

设 u 是 Dirichlet 问题的解。对 $\chi\in S_h$，应用 Green 公式，得到

$$(2)\quad N\gamma(u,\chi)=(\nabla u,\nabla\chi)-\langle\frac{\partial u}{\partial n},\chi\rangle-\langle u,\frac{\partial\chi}{\partial n}\rangle$$
$$+\gamma h^{-1}\langle u,\chi\rangle$$
$$=-(\Delta u,\chi)=(f,\chi).$$

基于此式，我们设立如下离散的 Dirichlet 问题：
寻求 $u_h\in S_h$，使得

$$(3)\quad N\gamma(u_h,\chi)=(f,\chi),\quad\forall\chi\in S_h.$$

下边将证明，如果适当选择 γ，这个问题有唯一解，且最佳阶误差估计成立。

为了分析，令 $|\cdot|=\|\cdot\|_{L_2(\partial\Omega)}$，并引进模

$$|||\varphi|||=\|\nabla\varphi\|+h^{1/2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|+h^{-1/2}|\varphi|$$

我们首先证明 $N\gamma(\cdot,\cdot)$ 按模 $|||\cdot|||$ 有上、下界。

引理 1. 对于固定的 γ，有

$$|N_\gamma(\varphi,\psi)|\leqslant C|||\varphi|||\cdot|||\psi|||,$$

且存在正数 γ_0 和 C，使得

$$N_\gamma(\chi,\chi)\geqslant C|||\chi|||^2,\quad\forall\chi\in S_h,\quad\gamma\geqslant\gamma_0,$$

证明．由定义，引理的第一部分是明显的．对于第二部分，首先注意空间族 $\{S_h\}$ 满足如下的逆性质：存在与 h 无关的 C_0，使得

$$(4)\qquad \left|\frac{\partial\chi}{\partial n}\right|^2 \leqslant C_0 h^{-1}\|\nabla\chi\|^2,\quad \forall\chi\in S_h.$$

这个估计式，容易通过映射每一个边界三角形为参考三角形 $\tilde{\tau}_j$ 来证明，$\tilde{\tau}_j$ 的顶点是(0, 0), (1, 0)和(0, 1)，连接(0, 1)和(1, 0)的边相应于曲边，并且这里要注意，对于 $\eta=\nabla\chi$，

$$\|\eta\|^2_{L_2(\partial\tilde{\tau}_j)} \leqslant C\|\eta\|^2_{L_2(\tilde{\tau}_j)},$$

这是由于右边是次数 $\leqslant r-2$ 的多项式空间上的一个模．因子 h^{-1} 则是出自返回到 τ_j 的变换，对所有边界三角形求和，即可得到(4)．

利用(4)，有

$$\begin{aligned}
N_\gamma(\chi,\chi) &= \|\nabla\chi\|^2 - 2\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial n},\chi\right\rangle + \gamma h^{-1}|\chi|^2 \\
&\geqslant \|\nabla\chi\|^2 - 2\left|\frac{\partial\chi}{\partial n}\right||\chi| + \gamma h^{-1}|\chi|^2 \\
&\geqslant \|\nabla\chi\|^2 - \frac{h}{4C_0}\left|\frac{\partial\chi}{\partial n}\right|^2 - \frac{4C_0}{h}|\chi|^2 \\
&\quad + \frac{\gamma}{h}|\chi|^2 \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|\nabla\chi\|^2 + \frac{h}{4C_0}\left|\frac{\partial\chi}{\partial n}\right|^2 \\
&\quad + (\gamma-4C_0)h^{-1}|\chi|^2 \geqslant C|\!|\!|\chi|\!|\!|^2,
\end{aligned}$$

当 $\gamma\geqslant\gamma_0>4C_0$ 时．

这就完成了引理的证明

现在证明子空间 S_h 关于模 $|||\cdot|||$ 的逼近性质。

引理2. 我们有

(5) $\inf_{\chi\in S_h}|||v-\chi|||\leqslant Ch^{s-1}\|v\|_s$，对于 $2\leqslant s\leqslant r$，

$$v\in H^s(\Omega).$$

证明. 设 τ_j 是边界三角形，$(\partial\Omega)_j$ 是 $\partial\Omega$ 的相应部分。映射 τ_j 到单位三角形 $\tilde{\tau}_j$，我们看到，对任一 $\varphi\in H^2(\tau_j)$，

$$\|\varphi\|^2_{L_2((\partial\Omega)_j)}\leqslant C\|\varphi\|_{L_2(\tau_j)}\cdot\|\varphi\|_{H^1(\tau_j)},$$

因此

$$h^{-1}\|\varphi\|^2_{L_2((\partial\Omega)_j)}\leqslant C(h^{-2}\|\varphi\|^2_{L_2(\tau_j)}+\|\varphi\|^2_{H^1(\tau_j)}),$$

或者，求和以后，

$$h^{-1}|\varphi|^2\leqslant C(h^{-2}\|\varphi\|^2+\|\varphi\|_1^2).$$

由此得

$$h^{-1/2}|\varphi|\leqslant C(h^{-1}\|\varphi\|+\|\varphi\|_1).$$

类似地，令 $\|\cdot\|_{2,h}=\left(\sum_j\|\cdot\|^2_{H^2(\tau_j)}\right)^{1/2}$，有

$$h^{1/2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|\leqslant C(\|\varphi\|_1+h\|\varphi\|_{2,h}),$$

于是合起来，有

$$|||\varphi|||\leqslant Ch^{-1}(\|\varphi\|+h\|\varphi\|_1+h^2\|\varphi\|_{2,h}).$$

由于容易找到往 S_h 的局部插值算子 I_h，使得

$$\|I_hv-v\|+h\|I_hv-v\|_1+h^2\|I_hv-v\|_{2,h}\leqslant Ch^s\|v\|_s,$$

$$2\leqslant s\leqslant r,$$

这样(5)式的证明完成。

由现在起，我们假定 γ 是如此选定的，使得引理 1 的第二个估计式成立。那么，特别地 $N_\gamma(\cdot,\cdot)$ 在 S_h 上是正定的，从而离散的 Dirichlet 问题有唯一解。由(3)减去(2)

即得方程

$$N\gamma(u_h-u,\chi)=0, \quad \forall\chi\in Sh,$$

我们将用它证明如下的误差估计。

定理1. 对于(3)和(1)的解 u_h 和 u，有

$$|||u_h-u|||\leqslant Ch^{s-1}\|u\|_s, \quad 2\leqslant s\leqslant r.$$

特别地有

$$\|\nabla(u_h-u)\|\leqslant Chs^{-1}\|u\|_r.$$

证明. 对于任意 $\chi\in S_h$，有

$$|||u_h-u|||\leqslant|||u-\chi|||+|||\chi-u_h|||.$$

由引理1，

$$|||\chi-u_h|||^2\leq CN\gamma(\chi-u_h,\chi-u_h)=CN\gamma(\chi-u,\chi-u_h)$$
$$\leqslant C|||\chi-u|||\ |||\chi-u_h|||.$$

故

$$|||\chi-u_h|||\leqslant c|||\chi-u|||.$$

从而由引理2得到

$$|||u_h-u|||\leqslant(1+c)\inf_{\chi\in S_h}|||\chi-u|||\leqslant ch^{s-1}\|u\|_s, \quad 2\leqslant s\leqslant r,$$

即定理得证。

我们还有如下的 L_2—模估计.

定理2. 对于(3)和(1)的解 u_h 和 u，有

$$\|u_h-u\|\leqslant Ch^s\|u\|_s, \quad 2\leqslant s\leqslant r.$$

证明. 应用通常的对偶论证。定义 ψ:

$$-\Delta\psi=\varphi, \text{ 于 } \Omega \text{ 内}, \quad \psi=0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

已知有下述椭圆的正则性估计,

$$\|\psi\|_2\leqslant C\|\varphi\|.$$

令 $e=u_h-u$, 有

$$(e,\varphi)=-(e,\Delta\psi)=(\nabla e,\nabla\psi)-\langle e,\frac{\partial\psi}{\partial n}\rangle=N\gamma(e,\psi).$$

对于辅助问题的近似解 ψ_h，根据定理 1（取 $s=2$）并利用引理 1，则有

$$|(e,\varphi)| = |N\gamma(e,\psi-\psi_h)| \leqslant C|||e|||\cdot|||\psi-\psi_h|||$$

$$\leqslant Ch|||\psi|||_2|||e||| \leqslant Ch\|\varphi\|\cdot|||e|||.$$

由此，再一次应用定理 1，得到

$$|(e,\varphi)| \leqslant Ch^s\|u\|_s\|\varphi\|, \quad z\leqslant s\leqslant r,$$

这就证明了定理。

现在再来继续讨论抛物问题

$$u_t - \Delta u = f, \text{ 于 } \Omega\times[0,\infty)\text{内},$$

$$u=0, \text{ 在 } \partial\Omega\times[0,\infty)\text{上},$$

$$u=V, \text{ 于 } \Omega \text{ 内}, \ t=0.$$

我们介绍前述 L_2——模误差估计的另外一种推导方法。这个方法适用于足以包括 $S_h\not\subset H_0^1(\Omega)$ 的一般情形，譬如前边所描述的 Nitsche 方法就是一例。现在允许 $\Omega\subset R^d, d\geqslant 2$。

为了引导，先让我们回忆一下椭圆问题的标准 Galerkin 方法，且 $S_h\subset H_0^1(\Omega)$，也就是

$$(\nabla V_h,\nabla\chi)=(f,\chi), \quad \forall\chi\in S_h.$$

定义线性算子 $T_h: L_2(\Omega)\longrightarrow S_h$ 为

$$T_hf=Vh,$$

于是 $V_h=T_hf\in S_h$ 是椭圆问题

$$-\Delta V=f, \text{于 } \Omega \text{ 内}, \ V=0, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

的近似解。设 $V=Tf$ 是这个问题的精确解，于是，$T: L_2(\Omega)\rightarrow H_0^1(\Omega)$ 表示精确解算子，我们有

$$T_h=P_1T,$$

其中 P_1 是第一章中考虑的椭圆投影算子。已知

$$\|P_1V-V\|+h\|\nabla(P_1V-V)\|\leqslant Ch^s\|V\|_s, \quad 1\leqslant s\leqslant r,$$

$$V\in H^r(\Omega)\cap H_0^1(\Omega).$$

由此可得

$$\|T_hf-Tf\|=\|(P_1-I)Tf\|\leqslant Ch^s\|Tf\|_s.$$

由椭圆的正则性估计，对于 $s\geqslant2$，有

$$\|V\|_s\leqslant\|\Delta V\|_{s-2}，当 V|\partial\Omega=0 时，$$

或者

$$\|Tf\|_s\leqslant C\|f\|_{s-2}，对于 s\geqslant2.$$

从而有

$$\|T_hf-Tf\|\leqslant Ch^s\|f\|_{s-2}，\ 2\leqslant s\leqslant r，\ f\in H^{s-2}(\Omega).$$

再注意 T_h 是自共轭的并在 $L_2(\Omega)$ 中半正定：

$$(f,T_hg)=(\nabla T_hf,\nabla T_hg)=(T_hf,g)，\ \forall f,g\in L_2(\Omega)；$$

特别地，

$$(T_hf,f)=\|\nabla T_hf\|^2\geqslant0.$$

事实上，把 S_h 作为具有 L_2 内积的内积空间考虑时，T_h 在 S_h 上是正定的，因为，若 $f_h\in S_h$ 并使得 $T_hf_h=0$，则有

$$\|f_h\|^2=(f_h,f_h)=(\nabla T_hf_h,\nabla f_h)=0.$$

回想“离散 Laplace 算子” $\Delta_h:S_h\longrightarrow S_h$ 的定义，即

$$(\Delta_h\psi,\chi)=-(\nabla\psi,\nabla\chi)，\ \forall\chi\in S_h，$$

则在 S_h 上有 $T_h=(-\Delta_h)^{-1}$，这是因为

$$(f_h,\chi)=(\nabla T_hf_h,\nabla\chi)=-(\Delta_hT_hf_h,\chi)，\ \forall\chi\in S_h.$$

于是

$$-\Delta_hT_hf_h=f_h，\qquad 对 f_h\in S_h.$$

其次，因为

$$(\nabla T_hP_0f,\nabla\chi)=(P_0f,\chi)=(f,\chi)=(\nabla T_hf,\nabla\chi)$$
$$\forall\chi\in S_h，$$

从而又有 $T_hP_0=T_h$.

现在回想半离散问题

$$u_{h,t}-\Delta_hu_h=P_0f，\ t\geqslant0，$$

$$u_h(0)=V_h.$$

根据上面的推导，它可以等价地写成

$$T_h u_{h,t}+u_h=T_h P_0 f=T_h f,\quad t\geqslant 0,$$

$$u_h(0)=V_h.$$

类似地，对于连续问题，有

$$Tu_t+u=Tf,\quad t\geqslant 0,$$

$$u(0)=V.$$

与 T_h 同样的道理，T 是自共轭的，实际上，在 $L_2(\Omega)$ 上还是正定的，因为

$$(f,\varphi)=(\nabla Tf,\nabla\varphi),\quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega),$$

这隐含着

$$(f,Tf)=\|\nabla Tf\|^2\geqslant O,$$

且显然当 $Tf=0$ 时，有 $f=-\Delta Tf=0$。

从现在开始，替代定义上面椭圆问题的近似解，仅假定给定一个近似解算子 T_h，它具有性质：

(i) T_h 是自共轭的，在 $L_2(\Omega)$ 上是半正定的，且在 S_h 上为正定；

(ii) 存在一个正整数 $r\geqslant 2$，使得

$$\|(T_h-T)f\|\leqslant Ch^s\|f\|_{s-2},\ 2\leqslant s\leqslant r,\quad f\in H^{s-2}(\Omega).$$

然后我们可以设立半离散问题

$$(7)\qquad T_h u_{h,t}+u_h=T_h f,\quad t\geqslant 0,\quad u_h(0)=V_h,$$

对于 $t\geqslant 0$ 它是唯一可解的，因为由(i)，T_h^{-1} 在 S_h 上存在。

作为一个例子，对于椭圆问题可考虑 Nitsche 方法，这时，T_h 由下式定义

$$N\gamma(T_h f,\chi)=(f,\chi),\quad \forall\chi\in S_h.$$

性质(ii)则是 Nitsche 方法的 L_2 误差估计（定理 2）。

半离散问题现在等价于

$$(u_{h,t},\chi)+N\gamma(u_h,\chi)=(f,\chi),\ \forall\chi\in S_h,$$
$$u_h(0)=V_h.$$

注意，这时关于$\{S_h\}$的逼近性质不作明确地假设，但可由(ii)推出，对于$2\leqslant s\leqslant r$，

$$\inf_{\chi\in S_h}\|V-\chi\|\leqslant\|V-T_h(-\Delta V)\|=\|(T-T_h)\Delta V\|$$
$$\leqslant Ch^s\|\Delta V\|_{s-2}\leqslant Ch^s\|V\|_s.$$

特别地，关于L_2内积的正交投影P_0，有

$$\|V-P_0V\|\leqslant Ch^s\|V\|_s,\ 2\leqslant s\leqslant r,$$

并且，如果引进"椭圆"投影$P_1=T_h(-\Delta)$：$H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\longrightarrow S_h$，上面的论证表明

$$(8)\quad \|V-P_1V\|\leqslant Ch^s\|V\|_s,\ 2\leqslant s\leqslant r.$$

对于标准Galerkin方法，这里定义的投影和原来定义的椭圆投影完全相同，而对于Nitsche方法，按其定义，则有

$$N\gamma((P_1-I)V,\chi)=0,\ \forall\chi\in S_h.$$

现在，我们就一般的情形证明一个误差估计，它与早先证明过的作为特殊情形的标准Galerkin方法的误差估计具有同样的形式。

定理3. 假设T_h满足(i)和(ii)，设u_h和u分别是(7)和(6)的解，则有

$$\|u_h(t)-u(t)\|\leqslant\|V_h-V\|+Ch^r\left\{\|V\|_r+\int_0^t\|u_t\|_r ds\right\},$$
$$t\geqslant 0.$$

证明. 对于误差$e=u_h-u$，有

$$\begin{aligned}T_he_t+e&=(T_hu_{h,t}+u_h)-(T_hu_t+u)\\&=T_hf-(Tu_t+u)+(T-T_h)u_t\\&=(T-T_h)(u_t-f)=(T-T_h)\Delta u,\end{aligned}$$

即

(9) $T_h e_t + e = -\rho$, 其中 $\rho = (T_h - T)\Delta u$。
上式乘以 e_t 并在 Ω 上积分，可得

$$(T_h e_t, e_t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|e\|^2 = -(\rho, e_t) = -\frac{d}{dt}(\rho, e) + (\rho_t, e),$$

于是有

$$\begin{aligned}\|e(t)\|^2 &\leqslant \|e(0)\|^2 + 2\|\rho(t)\|\|e(t)\| + 2\|\rho(0)\|\|e(0)\| + 2\int_0^t \|\rho_t\|\|e\|ds \\ &\leqslant \sup_{s\leqslant t}\|e(s)\|\left\{\|e(0)\| + 4\sup_{s\leqslant t}\|\rho(s)\| + 2\int_0^t \|\rho_t\|ds\right\}.\end{aligned}$$

对于任意的 $\tau \leqslant t$ 应用这个不等式，特别对使得

$$\|e(\tau)\| = \sup_{s\leqslant t}\|e(s)\|$$

成立的 τ，则有

$$\begin{aligned}\|e(t)\| &\leqslant \|e(0)\| + 4\sup_{s\leqslant t}\|\rho(s)\| + 2\int_0^t \|\rho_t\|ds \\ &\leqslant \|e(0)\| + C\left\{\|\rho(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\|ds\right\}.\end{aligned}$$

这里 $e(0) = V_h - V$，并且

$$\|\rho(0)\| = \|(T_h - T)\Delta V\| \leqslant Ch^r\|\Delta V\|_{r-2} \leqslant Ch^r\|V\|_r,$$

$$\|\rho_t(s)\| = \|(T_h - T)\Delta u_t\| \leqslant Ch^r\|u_t\|_r,$$

因此

$$\|e(t)\| \leqslant \|V_h - V\| + Ch^r\left\{\|V\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds\right\}$$

至此定理证毕。

为了以后参考，提醒一下证明的要点是如下的引理：

引理3. 设

$$T_h e_t + e = -\rho, \quad t \geqslant 0,$$

其中 T_h 关于（半）内积$(\cdot,\cdot)$是非负的($(T_h f, f) \geqslant 0$)。那么对相应的（半）模 $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$，则有

$$\|e(t)\| \leqslant \|e(0)\| + C\left\{\|\rho(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\| ds\right\}.$$

由前边定理3的讨论，可以看出：若V_h 选为$V_h = P_0 V$ 或$V_h = P_1 V$，则误差估计的右边第一项可以用第二项控制。

对于标准 Galerkin 方法，我们知道，梯度的误差估计是从抛物问题的弱形式导出的；当半离散抛物问题是基于 Nitsche 方法时，一个类似的论证也能导出梯度的误差估计。替代这种对一个个特殊选取的$\{T_h\}$的讨论，我们要在自然的逼近假设

(iii) $\inf\limits_{\chi \in S_h} \{\|V - \chi\| + h\|\nabla(V - \chi\|)\} \leqslant Ch^r \|V\|_r$,

和逆假设

(iv) $\|\nabla\chi\| \leqslant Ch^{-1}\|\chi\|$, $\forall \chi \in S_h$,

之下来证明一个结果。

定理4. 假定(i)，(ii)，(iii)和(iv)成立，设u_h 和 u 分别是(7)和(6)的解。那么，若V_h 选得使

$$\|V_h - V\| \leqslant Ch^r \|V\|_r,$$

则有

$$\|\nabla(u_h(t) - u(t))\| \leqslant Ch^{r-1}\left\{\|V\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds\right\}.$$

证明。利用(iv)，对任意 $\chi \in S_h$，有

$$\begin{aligned}
\|\nabla e(t)\| &\leqslant \|\nabla(u_h(t) - \chi)\| + \|\nabla(\chi - u(t))\| \\
&\leqslant Ch^{-1}\|u_h(t) - \chi\| + \|\nabla(\chi - u(t))\| \\
&\leqslant Ch^{-1}\|e(t)\| + Ch^{-1}\|u(t) - \chi\| + \|\nabla(\chi - u(t))\|,
\end{aligned}$$

因此，由定理3和(iii)，

$$\|\nabla e(t)\| \leqslant Ch^{-1}\|e(t)\| + Ch^{-1}h^r\|u(t)\|_r,$$

$$\leqslant Ch^{r-1}\left\{\|V\|_r+\int_0^t\|u_t\|_r ds\right\},$$

定理得证。

我们用关于抛物问题的其他形式的误差界的两个例子结束这一章，这两个例子的共同特点是不出现解的时间导数。第一个结果给出在时间上也是平均平方模的误差估计。

定理 5. 假设 T_h 满足(i)和(ii)，设 u_h 和 u 分别是(7)和(6)的解，$V_h=P_0V$，则对 $t\geqslant 0$，有

$$\left(\int_0^t\|u_h-u\|^2ds\right)^{1/2}\leqslant Ch^r\left(\int_0^t\|u\|_r^2ds\right)^{1/2}.$$

证明. 用 e 对误差方程(9)作 L_2—内积，并注意到，由于 T_h 是自共轭的，有

$$(T_h e_t, e)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(T_h e, e).$$

因此，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(T_h e, e)+\|e\|^2=-(\rho, e)\leqslant\frac{1}{2}\|e\|^2+\frac{1}{2}\|\rho\|^2.$$

积分以后，得到，

$$(T_h e(t), e(t))+\int_0^t\|e\|^2ds\leqslant(T_h e(0), e(0))+\int_0^t\|\rho\|^2ds.$$

注意，对于 $V_h=P_0V$，有 $T_h e(0)=0$。这是因为，对 $\forall V\in L_2$，$T_hV\in S_h$。从而有

$$(T_h e(0), V)=(P_0V-V, T_hV)=0.$$

这样一来，

$$\int_0^t\|e\|^2ds\leqslant\int_0^t\|\rho\|^2ds, \tag{10}$$

再利用(ii)，便得

$$\int_0^t\|e\|^2ds\leqslant Ch^{2r}\int_0^t\|u\|_r^2ds,$$

定理得证。

为了证明本章的最后一个结果，我们引进如下齐次半离散抛物方程初值问题的解算子 $E_h(t)$，

(11)　$T_h u_{h,t} + u_h = 0$，$t \geqslant 0$。

注意 $E_h(t)$是由 $\Delta_h = -T_h^{-1}$ 生成的 S_h 上的半群，则(11)等价于

(12)　$u_{h,t} = \Delta_h u_h$，$t \geqslant 0$。

用如下引理，我们将证明这个半群是一致有界和解析的。

引理 4．假设(i)成立，则(12)的解算子 $E_h(t)$是有界的，即

(13)　$\|E_h(t)V_h\| \leqslant \|V_h\|$，$t \geqslant 0$，

且对每一个 $l > 0$，存在常数 C，使得

(14)　$\|D_t^l E_h(t)V_h\| \leqslant C t^{-l}\|V_h\|$，$t \geqslant 0$。

证明。用能量法来证明这个引理。令 $u_h(t) = E_h(t)V_h$，由(11)有

$$(T_h u_{h,t}, u_{h,t}) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h\|^2 = 0,$$

积分之得

$$2\int_0^t (T_h u_{h,t}, u_{h,t})ds + \|u_h\|^2 \leqslant \|V_h\|^2,$$

这隐含着(13)。为了证明(14)，考虑 $l=1$ 就够了，作为一般结果，可由半群性质 $E_h(t+s) = E_h(t)E_h(s)$，和重复地应用上述结果得到。对(11)微分，有

(15)　$T_h u_{h,tt} + u_{h,t} = 0$，

由此，乘以 $t^2 u_{h,tt}$ 以后，得

$$t^2(T_h u_{h,tt}, u_{h,tt}) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(t^2\|u_{h,t}\|^2) = t\|u_{h,t}\|^2,$$

于是，积分以后得到

$$t^2\|u_{h,t}\|^2\leqslant 2\int_0^t s\|u_{h,t}\|^2 ds.$$

类似地，用 $tu_{h,t}$ 乘(15)，得到

$$\frac{d}{dt}(t(T_h u_{h,t},u_{h,t}))+2T\|u_{h,t}\|^2=(T_h u_{h,t},u_{h,t}),$$

因此有

$$2\int_0^t\|u_{h,t}\|^2 ds\leqslant\int_0^t(T_h u_{h,t},u_{h,t})ds=-\int_0^t(u_h,u_{h,t})ds$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{dt}\|u_h\|^2 ds\leqslant\frac{1}{2}\|V_h\|^2,$$

综合以上估计定理得证。

在下边的结果中，还需要假设逆估计式

(v) $\|\Delta_h\chi\|\leqslant Ch^{-\beta}\|\chi\|$，$\chi\in S_h$。

对于标准 Galerkin 方法，用前边的逆假设(iv)，估计式(v)对于 $\beta=2$ 是成立的，因为，对于 $\chi\in S_h$，

$$\|\Delta_h\chi\|^2=-(\nabla\Delta_h\chi,\nabla\chi)\leqslant\|\nabla\Delta_h\chi\|\|\nabla\chi\|$$

$$\leqslant Ch^{-2}\|\Delta_h\chi\|\|\chi\|.$$

我们现在证明下述几乎最佳阶的误差估计.

定理6. 假设(i),(ii)和(v)成立，设 u_h和u 分别是(7)和(6)的解，$V_h=P_1V=-T_h\Delta V$,则对于 $t\geqslant 0$,有

$$\|u_h(t)-u(t)\|\leqslant Ch^r\left(1+\left|\log\frac{t}{h^\beta}\right|\right)\operatorname*{Sup}_{0\leqslant s\leqslant t}\|u(s)\|_r.$$

证明. 象在第一章里那样，令

$$u_h-u=(u_h-P_1u)+(P_1u-u)=\theta+\rho.$$

由(8)显然有

$$\|\rho(t)\|=\|P_1u(t)-u(t)\|\leqslant Ch^r\|u(t)\|_r,$$

剩下的是估计 $\theta=u_h-P_1u$。由(7)有，

$$T_h\theta_t+\theta=T_hf-(T_hP_1u_t+P_1u)=-T_h\rho_t=-T_hP_0\rho_t,$$

这里最后一步利用了 $T_hP_0=T_h$ 的事实，它可由

$$(T_hP_0V,W)=(P_0V,T_hW)=(V,T_hW)=(T_hV,W),$$
$$\forall V,W\in L_2(\Omega),$$

得到。又因 $\theta\in S_h$，从而满足

$$\theta_t-\Delta_h\theta=-P_0\rho_t,\quad t\geqslant 0,$$
$$\theta(0)=0,$$

并且由 Duhamel 原理，有

$$\theta(t)=-\int_0^t E_h(t-s)P_0\rho_t(s)ds.$$

通过分部积分，得到

$$\theta(t)=E_h(t)P_0\rho(0)-P_0\rho(t)-\int_0^t E_h'(t-s)P_0\rho(s)ds,$$

因此，

$$\text{(16)}\quad \|\theta(t)\|\leqslant\Big(\|E_h(t)\|+1+\int_0^t\|E_h'(s)\|ds\Big)\sup_{0<S<t}\|\rho(s)\|.$$

为了估计积分项，对小的 s 可用 $Ch^{-\beta}$ 估计被积函数。事实上，应用逆假设(V)，有

$$\|E_h'(t)V_h\|=\|\Delta_hE_h(t)V_h\|\leqslant Ch^{-\beta}\|E_h(t)V_h\|\leqslant Ch^{-\beta}\|V_h\|.$$

这样，再利用引理 4，便得

$$\int_0^t\|E_h'(s)\|ds\leqslant\Big(\int_0^{h^\beta}+\int_{h^\beta}^t\Big)\|E_h'(s)\|ds$$
$$\leqslant\int_0^{h^\beta}ch^{-\beta}ds+C\left|\int_{h^\beta}^t\frac{ds}{s}\right|\leqslant C\left(1+\left|\log\frac{t}{h^\beta}\right|\right).$$

由于 $E_h(t)$是有界的，由(16)和(8)推出

$$\|\theta(t)\|\leqslant ch^r\left(1+\left|\log\frac{t}{h^\beta}\right|\right)\sup_{0<S<t}\|u(s)\|_r,$$

至此定理证毕。

参 考 文 献

对于椭圆问题的Nitsche方法是在〔1〕中引进的。算子 T_k 用于抛物问题的分析，最早是在〔2〕中对齐次抛物方程作的，随后在〔3〕中对非齐次方程也应用了这个分析方法。

1. J. A. Nitsche, Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet—Problemen bei Verwendung von Teilraumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. 36, 9—15(1971).
2. J. H. Bramble, A. H. Schatz, V. Thomée, and L. B. Wahlbin, Some convergence estimates for semidiscrete Galerkin type approximations for parabolic equations. SIAM J. Numer. Anal. 14, 218—241(1977).
3. V. Thomée, Negative norm estimates and superconvergence in Galerkin methods for parabolic problems. Math. Comput. 34, 93—113(1980).

第三章　对于齐次方程光滑和非光滑初值情形的误差估计

首先我们引进某些函数空间，这些函数空间对于描述齐次方程解的正则性是方便的。

考虑齐次热传导方程的初边值问题

（1）　$u_t=\Delta u$，于 $\Omega\times[0,\infty)$内，

$u=0$，在 $\partial\Omega\times[0,\infty)$上，

$u(x,0)=V(x)$，于 Ω 内，

其中 Ω 是 R^d 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域．相伴随的特征值问题为

$$-\Delta\varphi=\lambda\varphi,\text{于 }\Omega\text{ 内，}\ \varphi=0,\ \text{在 }\partial\Omega\text{ 上。}$$

众所周知，这个特征值问题具有正的特征值序列$\{\lambda m\}_1^\infty$，λm随 m 增大而超于∞，以及相应的特征函数序列$\{\varphi_m\}_1^\infty$，它们构成 $L_2(\Omega)$的一组正交基底。于是，任意$V\in L_2(\Omega)$可以表示成

$$V=\sum_{m=1}^{\infty}(V,\varphi_m)\varphi_m,$$

并且 Parseval 等式

$$(V,W)=\sum_{m=1}^{\infty}(V,\varphi_m)(W,\varphi_m),$$

成立。

对 $s\geqslant0$，设 $\dot{H}^s(\Omega)$是 $L_2(\Omega)$的子空间，它由

$$\|V\|_{\dot{H}^S(\Omega)}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^S(V,\varphi_m)^2\right)^{1/2}<\infty$$

所定义并且有如下特性：

引理1.对于非负整数 s，

$\dot{H}^S(\Omega)=\{V\in H^S(\Omega);\ \Delta^j V=0,$ 在 $\partial\Omega$ 上，$j<s/2\}$，

并且模 $\|\cdot\|_{\dot{H}^S(\Omega)}$ 和 $\|\cdot\|_S=\|\cdot\|_{H^S(\Omega)}$ 在 $\dot{H}^S(\Omega)$ 中是等价的。

证明：首先证明，若 $V\in H^1(\Omega)$，且在 $\partial\Omega$ 上 $V=0$，则 $V\in\dot{H}^S(\Omega)$ 并且

$$\|V\|_{\dot{H}^1(\Omega)}\leqslant C\|V\|_{H^1(\Omega)}.$$

事实上，对于 $V\in C_0^\infty(\Omega)$，我们有

$$\lambda_m(V,\varphi_m)=(V,\lambda_m\varphi_m)=-(V,\Delta\varphi_m)=-(\Delta V,\varphi_m),$$

因此，

$$\|V\|^2_{\dot{H}^1(\Omega)}=\sum_m\lambda_m(V,\varphi_m)^2=-\sum_m(V,\varphi_m)(\Delta V,\varphi_m)$$

$$=-(V,\Delta V)=\|\nabla V\|^2\leqslant\|V\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

由于 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $\{V\in H^1(\Omega);$ 在 $\partial\Omega$ 上 $V=0\}$ 中是稠密的，故所述论断成立。

对于 $V\in H^{2P+1}(\Omega)$，并且当 $j\leqslant p$ 时，在 $\partial\Omega$ 上 $\Delta^j V=0$，则有

$$\|V\|^2_{\dot{H}^{2P+1}(\Omega)}=\sum_m\lambda_m^{2P+1}(V,\varphi_m)^2=\sum_m\lambda_m(V,\lambda_m^P\varphi_m)^2$$

$$=\sum_m\lambda_m((-\Delta)^P V,\varphi_m)^2=\|\nabla\Delta^P V\|^2$$

$$\leqslant C\|V\|^2_{H^{2P+1}(\Omega)}.$$

类似地，若 $V\in H^{2P}(\Omega)$，且当 $j<p$ 时，在 $\partial\Omega$ 上 $\Delta^j V=0$，则有

$$\|V\|^2_{H^{2P}(\Omega)} = \sum_m \lambda_m^{2P}(V,\varphi_m)^2 = \sum_m (V,\lambda_m^P\varphi_m)^2$$

$$= \sum_m ((-\Delta)^P V,\varphi_m)^2 = \|\Delta^P V\| \le C\|V\|^2_{H^{2P}(\Omega)}.$$

这样就证明了：若$V\in H^S(\Omega)$，且对于$j<s/2$时，在$\partial\Omega$上$\Delta^j V=0$，则$V\in \dot{H}^S(\Omega)$，并且有

$$\|V\|_{\dot{H}^S(\Omega)} \le C\|V\|_{H^S(\Omega)}.$$

现在证明相反的包含关系。设$s=2P$，V是特征函数φ_m的有限线性组合。由前边的计算，知

$$\|\Delta^P \tilde{V}\| = \|\tilde{V}\|_{\dot{H}^{2P}(\Omega)}.$$

另一方面，根据众所周知的关于椭圆算子Δ^P的不等式，由于在$\partial\Omega$上的边界条件$\Delta^j V=0$，$j<P$，我们有

$$\|\tilde{V}\|_{H^{2P}(\Omega)} \le C\|\Delta^P \tilde{V}\| = C\|\tilde{V}\|_{\dot{H}^{2P}(\Omega)}.$$

因为$\tilde{V}$在$\dot{H}^{2P}(\Omega)$中稠密，可推出$V\in \dot{H}^{2P}(\Omega)$隐含着$V\in H^{2P}(\Omega)$，并且

$$\|V\|_{H^{2P}(\Omega)} \le C\|V\|_{\dot{H}^{2P}(\Omega)},\quad 对于 V\in \dot{H}^{2P}(\Omega).$$

又因（由追迹不等式）当$j<p$时

$$\|\Delta^j V\|_{L_2(\partial\Omega)} \le C\|V\|_{H^{2P}(\Omega)},$$

并且$\Delta^j \tilde{V}$在$\partial\Omega$上等于0，所以$\Delta^j V$在$\partial\Omega$上也一定等于0。

对于奇数情形，证明是类似的。

现在，初边值问题(1)的解可以用相应的解算子$E(t)$表示为

$$u(x,t) = E(t)V(x) = \sum_m e^{-t\lambda_m}(V,\varphi_m)\varphi_m(x),$$

并且有如下正则性结果。

引理 2. 若$V\in L_2(\Omega)$，对任意的$s\ge 0$，(1)的解$E(t)V$

当$t>0$时，属于$\dot{H}^S(\Omega)$。如果$0\le l\le s$，$V\in\dot{H}^l(\Omega)$，则有

$$\|E(t)V\|_{\dot{H}^S(\Omega)}\le Ct^{-\frac{1}{2}(S-l)}\|V\|_{\dot{H}^l(\Omega)},\quad t>0.$$

证明。我们有

$$\|E(t)V\|^2_{\dot{H}^S(\Omega)}=\sum_m \lambda_m^S e^{-2\lambda_m t}(V,\varphi_m)^2$$

$$\le Ct^{-(S-l)}\sum_m \lambda_m^l(V,\varphi_m)^2$$

$$=Ct^{-(S-l)}\|V\|^2_{\dot{H}^l(\Omega)},$$

其中

$$C=\operatorname*{Sup}_{\tau>0}(\tau^{S-l}e^{-2\tau}).$$

现在我们象第二章的开始那样，讨论初边值问题（1）的半离散逼近。$\{S_h\}$是$L_2(\Omega)$的一族有限维子空间，$\{T_h\}$是一个算子族，$T_h:L_2(\Omega)\to S_h$，它逼近于Dirichlet问题

$$-\Delta V=f,\ 于\Omega内,\quad V=0,\ 在\partial\Omega上,$$

的精确解算子T，且满足

(i) T_h是自共轭的，在$L_2(\Omega)$上是半正定的，且在S_h上是正定的；

(ii) $\|(T_h-T)f\|\le Ch^s\|f\|_{s-2}$，$2\le s\le r$，$f\in H^{s-2}(\Omega)$。

那么，齐次方程的半离散问题是

（2） $T_h u_{h,t}+u_h=0$，$t>0$，$u_h(0)=V_h$。

注意，此方程的解$u_h(t)$自动地在S_h里。

由前边已证明的关于非齐次问题的误差估计（第二章定理3），可以证明，对于齐次方程，以及V_h满足

$$\|V_h-V\|\le Ch^r\|V\|_r,$$

例如$V_h=P_0V$或$V_h=P_1V$，若$V\in\dot{H}^{r+\varepsilon}(\Omega)$，$\varepsilon>0$，那么，对于有界的$t$，有

$$\|u_h(t)-u(t)\| \leq C_\varepsilon h^r \|V\|_{\dot{H}^{r+\varepsilon}(\Omega)}.$$

事实上，此时由引理 2，

$$\|u_t(s)\|_r = \|\Delta u(s)\|_r \leq C\|u(s)\|_{r+2} \leq C\|u(s)\|_{\dot{H}^{r+2}(\Omega)}.$$
$$\leq C s^{-(1-\varepsilon/2)} \|V\|_{\dot{H}^{r+\varepsilon}(\Omega)},$$

或者

$$\int_0^t \|u_t(s)\|_r ds \leq C\|V\|_{\dot{H}^{r+\varepsilon}(\Omega)} \int_0^t s^{-(1-\varepsilon/2)} ds$$
$$\leq C\varepsilon^{-1} t^{\varepsilon/2} \|V\|_{\dot{H}^{r+\varepsilon}(\Omega)},$$

于是第二章的定理 3 隐含着所述结果。

我们证明一个稍微严格的估计：

定理 1。假设(i)和(ii)成立，$V \in \dot{H}^r(\Omega)$，以及

$$\|V_h - V\| \leq Ch^r \|V\|_r,$$

则对于半离散问题(2)的误差，有估计式

$$\|u_h(t)-u(t)\| \leq Ch^r \|V\|_r, \quad t \geq 0.$$

这个定理的证明，将依赖于如下结果：

引理 3。假设 T_h 在 $L_2(\Omega)$ 上是半正定的，并且

$$T_h e_t + e = -\rho, \quad t \geq 0, \quad T_h e(0) = 0.$$

则，对于 $t \geq 0$，有

$$\|e(t)\|^2 \leq C\left\{\|\rho(t)\|^2 + \frac{1}{t}\int_0^t (\|\rho\|^2 + s^2\|\rho_t\|^2) ds\right\}.$$

证明。首先有

$$(T_h e_t, e_t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|e\|^2 = -(\rho, e_t),$$

由于 T_h 是半正定的，故有

$$\frac{d}{dt}\|e\|^2 \leq -2(\rho, e_t) = -2\frac{d}{dt}(\rho, e) + 2(\rho_t, e).$$

乘以 t，则得

$$t\frac{d}{dt}\|e\|^2\leq -2t\frac{d}{dt}(\rho,e)+2t(\rho_t,e),$$

或者

$$\frac{d}{dt}(t\|e\|^2)\leq -2\frac{d}{dt}(t(\rho,e))+2t(\rho_t,e)$$
$$+\|e\|^2+2(\rho,e),$$

于是有

$$t\|e\|^2\leq 2t\|\rho\|\|e\|$$
$$+\int_0^t[\|e\|^2+2\|\rho\|\|e\|+2s\|\rho_t\|\|e\|]ds,$$

或者

$$\|e(t)\|^2\leq C\left\{\|\rho(t)\|^2+\frac{1}{t}\int_0^t[\|e\|^2+\|\rho\|^2+s^2\|\rho_t\|^2]\,ds\right\}.$$

由第二章的(10)式，已知

$$\int_0^t\|e\|^2ds\leq\int_0^t\|\rho\|^2ds.$$

综合以上这些估计式，即完成引理的证明。

作为一个直接推论，有

引理 4. 在引理 3 的假设下，对 $t\geqslant 0$，有

$$\|e(t)\|\leq C\sup_{S\leqslant t}\{S\|\rho_t(s)\|+\|\rho(s)\|\}.$$

为了以后的应用，还要注意右端第一项的系数可以任意小：

引理 5. 在引理 3 的假设下，对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\|e(t)\|\leq\varepsilon\sup_{S\leqslant t}(s\|\rho_t(s)\|)+C_\varepsilon\sup_{S\leqslant t}\|\rho(s)\|,\quad t\geqslant 0.$$

证明. 对引理 3 的证明作一个明显的修改，即可得

$$\|e(t)\|^2\leq\frac{\varepsilon^2}{t}\int_0^t s^2\|\rho_t\|^2ds+C_\varepsilon\left\{\|\rho(t)\|^2+\frac{1}{t}\int_0^t\|\rho\|^2ds\right\},$$

因此结论成立。

现在来证明定理 1.

定理 1 的证明. 首先注意，考虑 $V_h = P_0 V$ 情形就足够了；这可由

$$\|E_h(t)(P_0V - V_h)\| \le \|P_0V - V_h\| \le \|V - V_h\| + \|P_0V - V\| \le Ch^r\|V\|_2,$$

立即看出，其中 $E_h(t)$ 是半离散问题的解算子。

我们知道，误差 $e = u_h - u$ 满足误差方程

$T_h e_t + e = -\rho$, 这里 $\rho = (T_h - T)\Delta u = (T_h - T)u_t$,

并且对 $V_h = P_0 V$，$T_h e(0) = 0$。这样我们就可以应用引理 4 了．利用(ii)和引理 2，对于 $s \ge 0$，有

$$\|\rho(s)\| \le Ch^r\|u_t(s)\|_{r-2} \le Ch^r\|u(s)\|_r \le Ch^r\|V\|_r,$$

类似地，有

$$s\|\rho_t(s)\| \le Ch^r s\|u_t(s)\|_r \le Ch^r s\|u(s)\|_{r+2} \le Ch^r\|V\|_r.$$

由这些估计即可完成定理的证明.

注意，在这个定理的证明中，假设(ii)的估计仅用于 $f \in H^{r-2}(\Omega)$。类似的注释也适用于下边的定理 2 和 3.

现在转向讨论 V 不是充分光滑即不属于 $H^r(\Omega)$ 的情形。我们将证明对于正 t 的仍然有最佳收敛阶．首先考虑标准 Galerkin 方法，也就是当 $S_h \in H_0^1(\Omega)$, 和

$$\inf_{\chi \in S_h}\{\|V - \chi\| + h\|V - \chi\|_1\} \le Ch^s\|V\|_s, \quad 1 \le s \le r,$$

并且，T_h 定义为

$$(\nabla T_h f, \nabla \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h,$$

时的情形。我们知道，在这种情形下，加上 $P_1 u \in S_h$ 定义为

$$(\nabla P_1 u, \nabla \chi) = (\nabla u, \nabla \chi), \quad \forall \chi \in S,$$

则有 $P_1 = -T_h\Delta$，并且

$$\|P_1 u - u\| \le Ch\|u\|_1.$$

我们有如下结果：

定理2． 对于用标准 Galerkin 方法定义的 $\{T_h\}$ 和 $V_h = P_0 V$，则半离散抛物问题（2）有误差估计

$$\|u_h(t)-u(t)\| \leq Ch^r t^{-r/2}\|V\|,\ t\geq 0.$$

证明． 象通常那样，首先对 $e=u_h-u$ 证明

$$(3)\quad \|e(t)\| \leq Ch t^{-1/2}\|V\|,$$

然后由此式通过一个迭代论证来证明定理。

我们将应用引理3．利用前面对椭圆投影的估计以及引理2对精确解的正则性估计，有

$$\|\rho(t)\| = \|P_1 u - u\| \leq Ch\|u(t)\|_1 \leq Ch t^{-1/2}\|V\|.$$

其次由 $\dot{H}^1(\Omega)$ 中模的定义，

$$\frac{1}{t}\int_0^t \|\rho\|^2 ds \leq C\frac{h^2}{t}\int_0^t \|u\|_1^2 ds$$

$$\leq C\frac{h^2}{t}\int_0^t \sum_1^\infty \lambda_i (u(t),\varphi_i)^2 ds$$

$$\leqslant C\frac{h^2}{t}\int_0^\infty \sum_i \lambda_i e^{-2\lambda_i s}(V,\varphi_i)^2 ds$$

$$= C\frac{h^2}{t}\sum_i \lambda_i (V,\varphi_i)^2 \int_0^\infty e^{-2\lambda_i s} ds$$

$$= C\frac{h^2}{2t}\sum_i (V,\varphi_i)^2 = \frac{C}{2}\frac{h^2}{t}\|V\|^2.$$

最后，由同样的方法可得

$$\frac{1}{t}\int_0^t s^2\|\rho_t\|^2 ds \leq C\frac{h^2}{t}\int_0^t s^2\|u_t\|_1^2 ds \leq C\frac{h^2}{t}\int_0^t s^2\|u\|_3^2 ds$$

$$\leq C\frac{h^2}{t}\sum_i \lambda_i^3 (V,\varphi_i)^2 \int_0^\infty s^2 e^{-2\lambda_i s} ds$$

$$\leq C\frac{h^2}{t}\sum_i (V,\varphi_i)^2 = C\frac{h^2}{t}\|V\|^2.$$

综合以上估计，$e(t)$的预备估计式（3）通过引理3得证。

借助（2）的解算子 $E_h(t)$，现在令

$$e(t)=F_h(t)V=E_h(t)P_0V-E(t)V=u_h(t)-u(t),$$

则最终要求的估计可以叙述为

（4） $\|F_h(t)V\|\leq Ch^r t^{-r/2}\|V\|$，$t\geqslant 0$。

由于 $F_h(t)$在 $L_2(\Omega)$中显然是有界的，所以不妨假设 $ht^{-1/2}<1$。我们有等式

$$F_h(t)=F_h(t/2)E(t/2)+E(t/2)F_h(t/2)+F_h(t/2)^2.$$

事实上，利用定义和半群性质，等式的右端为

$$\begin{aligned}&(E_h(t/2)P_0-E(t/2))E(t/2)+E(t/2)(E_h(t/2)P_0\\&\qquad -E(t/2))\\&+(E_h(t/2)P_0-E(t/2))^2=E_h(t/2)^2P_0-E(t/2)^2\\&=F_h(t).\end{aligned}$$

利用定理1和引理2，有

$$\|F_h(t/2)E(t/2)V\|\leq Ch^r\|E(t/2)V\|_r\leq Ch^r t^{-r/2}\|V\|.$$

注意 $F_h(t/2)$与 $E(t/2)$都是自共轭的，可见 $E(t/2)F_h(t/2)$是 $F_h(t/2)E(t/2)$的共轭，这样它们作为 $L_2(\Omega)$上的算子，具有同样的模，于是

$$\|E(t/2)F_h(t/2)V\|\leq Ch^r t^{-r/2}\|V\|.$$

再由前面的证明，

$$\|F_h(t/2)^2V\|\leq Cht^{-1/2}\|F_h(t/2)V\|,$$

因此

$$\|F_h(t)V\|\leq Ch^r t^{-r/2}\|V\|+Cht^{-1/2}\|F_h(t/2)V\|.$$

通过反复应用此式，由于 $ht^{-1/2}\leq 1$，有

$$\|F_h(t)V\|\leq Ch^r t^{-r/2}\|V\|+C(ht^{-1/2})^S\|F_h(t/2^S)V\|.$$

选取 $s=r$，并注意

$$\|F_h(t/2^r)V\|\leq\|V\|,$$

就完成了(4)式的证明，从而定理得证。

现在讨论仅仅知道(i)和(ii)成立的更一般情形，有如下结果：

定理3. 假设(i)，(ii)成立，并且$V_h=P_0V$，那么，对于半离散抛物问题(2)，则有误差估计

$$\|u_h(t)-u(t)\|\leq Ch^r t^{-r/2}\|V\|,\quad t>0.$$

证明. 我们先证明$r=2$的结果。然后，象定理2那样，用迭代论证方法完成本定理的证明。

已知误差方程为

$$T_h e_t+e=-\rho=-(T_h-T)u_t,\quad t\geq 0.$$

令

$$\bar{\rho}(t)=\int_0^t \rho(s)ds,$$

我们来证明

$$(5)\quad \|e(t)\|\leq Ct^{-1}\operatorname*{Sup}_{s<t}\{s^2\|\rho_t(s)\|+s\|\rho(s)\| +\|\bar{\rho}(s)\|\}.$$

假定这个估计式成立，由(ii)和引理2，则有

$$s\|\rho(s)\|=s\|(T_h-T)u_t(s)\|\leq Ch^2 s\|u_t(s)\|\leq Ch^2\|V\|,$$

和

$$s^2\|\rho_t(s)\|\leq s^2\|(T_h-T)u_{tt}(s)\|\leq Ch^2 s^2\|u_{tt}(s)\|\leq Ch^2\|V\|.$$

由于

$$\|\bar{\rho}(s)\|=\left\|\int_0^s (T_h-T)u_t d\sigma\right\|=\|(T_h-T)(u(s)-V)\|$$
$$\leq Ch^2(\|u(s)\|+\|V\|)\leq Ch^2\|V\|,$$

从而推出

$$\|e(t)\|\leq Ct^{-1}h^2\|V\|,$$

这就是$r=2$时所要求的估计式。

剩下的是证明(5)式。为此，令$W=te$，并注意W满足

方程

$$T_h W_t + W = \eta \equiv -t\rho + T_h e.$$

那么，由引理 5 知道

$$\|W(t)\| \leq \varepsilon \operatorname*{Sup}_{S<t}(s\|\eta_t(s)\|) + C_\varepsilon \operatorname*{Sup}_{S<t}\|\eta(s)\|.$$

我们有

$$\begin{aligned} s\|\eta_t(s)\| &\leq s^2\|\rho_t(s)\| + s\|\rho(s)\| + s\|T_h e_t(s)\| \\ &\leq s^2\|\rho_t(s)\| + s\|\rho(s)\| + s\|\rho(s)\| + \|W(s)\| \end{aligned}$$

和

$$\|\eta(s)\| \leq s\|\rho(s)\| + \|T_h e(s)\|.$$

取 $\varepsilon = 1/2$，则推出，对所有 $t \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned} \|W(t)\| \leq & \frac{1}{2} \operatorname*{Sup}_{S<t}\|W(s)\| \\ & + C\operatorname*{Sup}_{S<t}\{s^2\|\rho_t(s)\| + s\|\rho(s)\| + \|T_h e(s)\|\}. \end{aligned}$$

选取 $\tau = \tau(t)$，使得

$$\operatorname*{Sup}_{S<t}\|W(s)\| = \|W(\tau)\|,$$

则有

$$\begin{aligned} \|W(\tau)\| \leq & \frac{1}{2}\|W(\tau)\| \\ & + C\operatorname*{Sup}_{S<t}\{s^2\|\rho_t(s)\| + s\|\rho(s)\| + \|T_h e(s)\|\}, \end{aligned}$$

于是

$$\|W(t)\| \leq W(\tau) \leq C\operatorname*{Sup}_{S<t}(s^2\|\rho_t(s)\| + s\|\rho(s)\| + \|T_h e(s)\|).$$

现在来估计 $T_h e$，为此，在 $(0,t)$上积分误差方程，并注意 $T_h e(0) = 0$，便得到

$$T_h e + \tilde{e} = T_h \tilde{e}_t + \tilde{e} = -\tilde{\rho}, \quad \tilde{e} = \int_0^t e ds.$$

由引理 4，则有

$$\|\tilde{e}(t)\| \le C \operatorname{Sup}_{s<t}(s\|\tilde{\rho}_t\| + \|\tilde{\rho}\|) \le C \operatorname{Sup}_{s<t}(s\|\rho\| + \|\tilde{\rho}\|),$$

因此，

$$\|T_h e\| \le \|\tilde{e}(t)\| + \|\tilde{\rho}\| \le C \operatorname{Sup}_{s<t}(s\|\rho\| + \|\tilde{\rho}\|).$$

这个估计式和前面的估计结合，便得到

$$\|W(t)\| \le C \operatorname{Sup}_{s<t}(s^2\|\rho_t\| + s\|\rho\| + \|\tilde{\rho}\|),$$

这就是(5)式。定理证毕。

现在证明误差的时间导数（或者时间导数的误差）的类似估计。令 $D_t = \partial/\partial t$。

定理4．假设(i)和(ii)成立，并且 $V_h = P_0 V$，那么，对于半离散抛物问题(2)的误差，有

$$\|D_t^l(u_h(t) - u(t))\| \le C h^r t^{-r/2-l} \|V\|, \; t > 0.$$

证明。对 l 用归纳法，$l = 0$，由定理3显然成立。假设对于 $l-1$，$l \geqslant 1$，定理的结论已经证明成立。令 $e^{(l)} = D_t^l e$，通过对误差方程求微分，有

$$T_h e_t^{(l)} + e^{(l)} = -\rho^{(l)}.$$

乘以 $t^{r/2+l}$，由于 $T_h e^{(l)} = T_h e_t^{(l-1)}$，得到

$$\begin{aligned} T_h(t^{r/2+l}e^{(l)})_t + t^{r/2+l}e^{(l)} &= -t^{r/2+l}\rho^{(l)} \\ &\quad + \left(\frac{r}{2}+l\right)t^{r/2+l-1}T_h e^{(l)} \\ &= -t^{r/2+l}\rho^{(l)} - \left(\frac{r}{2}+l\right)t^{r/2+l-1}(\rho^{(l-1)} + e^{(l-1)}), \end{aligned}$$

再应用引理5，推出（注意 $T_h(t^{r/2+l}e^{(l)}) = 0$，当 $t = 0$ 时）

$$\begin{aligned} t^{r/2+l}\|e^{(l)}(t)\| &\le \varepsilon \operatorname{Sup}_{s<t}(s^{r/2+l}\|e^{(l)}(s)\|) \\ &\quad + C_\varepsilon \operatorname{Sup}_{s<t}\left\{\sum_{j=-1}^{l} s^{r/2+l+j}\|\rho^{(l+j)}(s)\| \right. \\ &\quad \left. + s^{r/2+l-1}\|e^{(l-1)}(s)\|\right\}. \end{aligned}$$

现在，由于

$$\rho^{(q)} = D_t^q \rho = (T_h - T)u^{(q+1)},$$

故对任意 $q \geqslant 0$，利用(ii)和引理 2，则有

$$s^{r/2+q}\|\rho^{(q)}(s)\| \leq Ch^r s^{r/2+q}\|u^{(q+1)}(s)\|_{r-2}$$
$$\leq Ch^r s^{r/2+q}\|u(s)\|_{r+2q} \leq Ch^r\|V\|.$$

由归纳法假设，有

$$s^{r/2+l-1}\|e^{(l-1)}(s)\| \leq Ch^r\|V\|.$$

因此，选取 $\varepsilon < 1$，用证明定理 3 的同样方法，即可得到本定理的结果。

作为这一章的结尾，我们通过齐次问题的误差估计，来论证非齐次方程的相应估计。这里，对于严格大于 0 的有限时刻 t，为寻求 t 附近的误差估计，只须在 t 附近作强的正则性假设。考虑非齐次问题

$$u_t - \Delta u = f, \text{于 } \Omega \times [0, \infty) \text{内},$$
$$u = 0, \text{在 } \partial\Omega \times [0, \infty) \text{上},$$
$$u = V, \text{于 } \Omega \text{ 内}, \ t = 0.$$

其半离散问题为

$$(6)\quad T_h u_{h,t} + u_h = T_h f, \ t \geqslant 0,$$
$$u_h(0) = V_h.$$

要证明如下结果：

定理 5. 假设(i)和(ii)成立，并且 $V_h = P_0 V$，则对任意 $l \geqslant 0$，$t \geqslant \delta > 0$，半离散抛物问题(6)的误差满足估计式，

$$\|D_t^l(u_h(t) - u(t))\|$$
$$\leq ch^r\left\{\|V\| + \int_0^t \|f\| ds + \sum_{j \leq l+1} \int_{t-\delta}^t \|D_t^j u(s)\|_r ds\right\}.$$

证明. 考虑固定的 $t = t_1 \geqslant \delta$。设 $\varphi \in C^\infty$ 是这样的函数：当 $t \geqslant -3\delta/4$ 时，$\varphi(t) = 1$，当 $t \leq -s$ 时，$\varphi(t) = 0$。令 $\varphi_1(t)$

$=\varphi(t-t_1)$。我们把解 u 写成

$$u=u_1+u_2+u_3,$$

其中 $u_1=u\varphi_1$，u_2 是下述齐次方程的解

(Ⅱ) $u_{2,t}-\Delta u_2=0,\ t\geqslant 0,\ u_2(0)=V.$

由于

(Ⅰ) $u_{1,t}-\Delta u_1=f_1\equiv f\varphi_1+u\varphi_1',\quad t\geqslant 0,\ u_1(0)=0,$

则 u_3 满足

(Ⅲ) $u_{3,t}-\Delta u_3=f_3\equiv f(1-\varphi_1)-u\varphi_1',\ t\geqslant 0,$

$u_3(0)=0$。

注意，f_1 和 f_3 分别地于 $t\leq t_1-\delta$ 和 $t\geqslant t_1-3\delta/4$ 为 0。

设$u_{j,h}$，$j=1,2,3$，分别地是问题(Ⅰ)，(Ⅱ)和(Ⅲ)的半离散近似解，且有

$$u_{1,h}(0)=u_{3,h}=0,\ u_{2,h}(0)=P_0V,$$

并令 $e_j=u_{j,h}-u_j$。由线性性质，

$$e=u_h-u=\sum_{j=1}^{3}e_j,$$

显然，只需通过所要证明的不等式的右端来估计 $e_j(t_1)$，$j=1,2,3$。

首先考虑 u_1。由于 $D_t^lu_1$ 满足(Ⅰ)经过微分后所得的方程，$D_t^lu_{1,h}$ 满足与此相应的离散方程，且这两个函数当 t 充分小时都等于 0，所以，由第二章的定理 3，可得

$$\|D_t^le_1(t_1)\|\leq Ch^r\int_0^{t_1}\|D_t^{l+1}u_1\|_r ds$$

$$\leq Ch^r\sum_{j\leq l+1}\int_{t_1-\delta}^{t_1}\|D_t^ju\|_r ds.$$

对于齐次方程的解 u_2，由上面的定理 4，则有

$$\|D_t^le_2(t_1)\|\leq Ch^rt_1^{-r/2-l}\|V\|\leq C(\delta)h^r\|V\|.$$

最后，为了讨论 u_3，再次引进误差算子

$$F_h(t)=E_h(t)P_0-E(t),$$

由先前结果可知

$$\|D_t^l F_h(t)V\|\leq Ch^r\|V\|,\ t\geq\delta/4.$$

注意，通过迭加，对于$t>t_1-\delta/2$，

$$e_3(t)=\int_0^t F_h(t-s)f_3(s)ds=\int_0^{t_1-3\delta/4}F_h(t-s)f_3(s)ds.$$

因此

$$D_t^l e_3(t_1)=\int_0^{t_1-3\delta/4}D_t^l F_h(t_1-s)f_3(s)ds,$$

由此得到

$$\begin{aligned}\|D_t^l e_3(t_1)\|&\leq Ch^r\int_0^{t_1-3\delta/4}\|f_3(s)\|ds\\&\leq Ch^r\int_0^{t_1}(\|f\|+\|u\|)ds\\&\leq Ch^r\left\{\|V\|+\int_0^{t_1}\|f\|ds\right\}.\end{aligned}$$

这里最后一步用到了如下事实，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\|\nabla u\|^2=(f,u)\leq\|f\|\|u\|,$$

故

$$\frac{d}{dt}\|u\|\leq\|f\|,$$

从而，对于$t\geq 0$，

$$\|u(t)\|\leq\|V\|+\int_0^t\|f\|ds.$$

这就完成了证明。

上面对非光滑初值的结果，是与第二章引理4所证$E_h(t)$的光滑性质相关联的。作为那个引理的推论，我们特别地指出，在定理4和定理5中当选取P_0V以外的初值时，所引起的误差的时间导数有如下之上界

$$\|D_t^l E_h(t)(V_h - P_0 V)\| \leq ct^{-l}\|V_h - P_0 V\|。$$

参 考 文 献

定理1关于光滑初值的结果是取自〔1〕。对于齐次方程非光滑初值的结果，首先是在〔2〕,〔3〕,〔4〕，〔5〕和〔1〕中用谱表示法讨论过，后来在〔6〕，〔7〕和〔8〕中用能量法得到。定理5是〔9〕中结果的一个特殊情形。

1. J. H. Bramble, A. H. Schatz, V. Thomée, and L. B. Wahlbin, Some convergence estimates for semidiscrete Galerkin type approximations for parabolic equations. SIAM J. Numer. Anal. 14, 218——241(1977).
2. J. Blair, Approximate solution of elliptic and parabolic boundary value problems, Thesis, Univ. of California, Berkeley(1970).
3. V. Thomée, Some convergence results for Galerkin methods for parabolic boundary value problems. Mathematical Aspects of Finite Elements in partial Differential Equations, pp. 55—88. C. de Boor ed., Academic Press, New York (1974).
4. H.—P. Helfrich, Fehlerabschatzungen für das Galerkinverfahren zur Lösung von Evolutions—gleichungen。 Manuscr. Math. 13, 219—235 (1974).
5. H. Fujita and A. Mizutani, On the finite element method for parabolic equations. I. J. Math.

Soc. Japan 28, 749—771(1976).
6. M. Huang and V. Thomée, Some convergence estimates for semidiscrete type schemes for time—dependent nonselfadjoint parabolic equations. Math. Comput. 37, 327—346(1981).
7. M. Luskin and R. Rannacher, On the smoothing property of the Galerkin method for parabolic equations. SIAM J. Numer. Anal. 19, 93—113 (1982).
8. P. H. Sammon, Convergence estimates for semidiscrete parabolic equation approximations. SIAM. J. Numer. Anal. 19, 68—92(1982).
9. V. Thomée, Negative norm estimates and superconvergence in Galerkin methods for parabolic problems. Math. Comput. 34, 93—113(1980).

第四章　具有更一般椭圆算子的抛物方程

在这一章里，简要地讨论一下，我们先前所作的L_2误差分析对于更一般抛物方程

（1）　$u_t + Au = f$,　　于$\Omega\times I$内，

的初边值问题的推广，此处Ω是R^d中具有光滑边界$\partial\Omega$的区域，$I=[0,t^\circ]$，$A=A(t)$代表椭圆算子，

$$A(t)u = -\sum_{j,k=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{j=1}^{d} a_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x,t)u,$$

其中a_{jk}, a_j和a_0是$\bar\Omega\times I$上的C^∞类函数，$a_{jk}(x,t)=a_{kj}(x,t)$并且

$$\sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(x,t)\xi_j\xi_k \geqslant C_0|\xi|^2,\quad C_0>0.$$

这个方程比先前讨论的模型方程更具有一般性，这里允许椭圆算子具有依赖x和t的系数，含有低阶项，并且是非自共轭的和非正的。如同先前，我们考虑如下初边值条件

（2）　　$u=0$,　　在$\partial\Omega\times I$上，

$$u(\cdot,0)=V.$$

现在伴随A的双线性形式取为，

$$A(V,W)=A(t;V,W)=\int_\Omega\left(\sum_{j,k} a_{jk}\frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{\partial W}{\partial x_j} + \sum_j a_j\frac{\partial V}{\partial x_j}W + a_0 VW\right)dx,$$

则可将抛物问题写成弱形式

$$(u_t, \varphi) + A(t; u, \varphi) = (f, \varphi), \ \forall \varphi \in \mathring{H}^1(\Omega), \ t \in I,$$
$$u(\cdot, 0) = V.$$

这里，双线性形式不一定是正定的，但是 Gårding不等式

$$A(V, V) \geqslant C\|V\|_1^2 - \kappa\|V\|^2,$$

成立。事实上，对于$V \in \mathring{H}^1(\Omega)$，有

$$A(V, V) + \kappa\|V\|^2 = \int_\Omega \Big(\sum_{j,k} a_{jk} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \sum_j a_j \frac{\partial V}{\partial x_j} V$$
$$+ (a_0 + \kappa) V^2 \Big) dx = \int_\Omega \Big(\sum_{j,k} a_{jk} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_k}$$
$$+ (\kappa + a_0 - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_j}) V^2 \Big) dx \geqslant C\|V\|_1^2,$$

只要系数$\kappa > \sup\limits_{\Omega \times I} \left(\frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_j} - a_0 \right)$；下边我们总认为$\kappa$是满足此要求的固定常数.同时考虑伴随抛物问题的 Dirichlet 问题，

$$A_k u \equiv Au + \kappa u = f, \qquad 于\Omega内,$$
$$u = 0, \qquad 在\partial\Omega上,$$

其弱形式为，

$$A_k(u, \varphi) \equiv A(u, \varphi) + \kappa(u, \varphi) = (f, \varphi), \ \forall \varphi \in \mathring{H}^1(\Omega).$$

在(1)中引进$\tilde{u} = e^{-t\kappa} u$作为新的变量，则有

$$\tilde{u}_t + A_\kappa \tilde{u} = \tilde{f}, \quad 其中\tilde{f} = e^{-t\kappa} f,$$

或者

$$(\tilde{u}_t, \varphi) + A_\kappa(\tilde{u}, \varphi) = (\tilde{f}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(\Omega),$$

亦可表示成方程

$$T(t)\tilde{u}_t+\tilde{u}=T(t)\tilde{f}, \quad t\in I,$$

并带有初始条件

$$u(0)=V.$$

为了定义(1)，(2)的近似解，设$\{S_h\}$是$L_2(\Omega)$的一族有限维子空间，$T_h=T_h(t)$: $L_2(\Omega)\to S_h$是T的近似，并具有下边描述的性质。作为(1)，(2)的近似解，我们考虑函数$u_h:I\to S_h$，使得$u_h=e^{\kappa t}\tilde{u}_h(t)$满足

$$T_h\tilde{u}_{h,t}+\tilde{u}_h=T_h\tilde{f}, \quad t\in I,$$

$$u_h(0)=V_h.$$

为了确定(1)，(2)的精确解的一个好的近似，现在我们来描述对$\{T_h\}$应加的限制条件。前两个条件相当于先前讨论的模型问题的两个条件，其中第二条作了修改，以便容许方程的系数随时间变化。第三个条件是限制T_h的非自共轭的程度的，对于自共轭情形，它是自动满足的。这些条件即为：

(i) $(f,T_hf)\geqslant 0$，对于$f\in L_2(\Omega)$，且$(\chi,T_h\chi)>0$，对于$0\neq\chi\in S_h$。

(ii)对于某个整数$r\geqslant 2$（$'$表示对时间t的微分），

$$\|(T_h-T)f\|+\|(T'_h-T')f\|\leqslant Ch^s\|f\|_{s-2},$$

$$f\in H^{s-2}(\Omega), \quad 2\leqslant s\leqslant r.$$

(iii) $\|(T_hf,g)-(f,T_hg)\|\leqslant C(f,T_hf)^{1/2}\|T_hg\|$,

$$f,g\in L_2(\Omega).$$

作为一个例子，考虑$S_h\subset H_0^1(\Omega)$和T_h是标准Galerkin方法对应的椭圆解算子，于是，

$$A_\kappa(t;T_h(t)f,\chi)=(f,\chi), \quad \forall\chi\in S_h.$$

此时，半离散方程等价于

$$(\tilde{u}_{h,t},\chi)+A_\kappa(t;\tilde{u}_h,\chi)=(f,\chi), \quad \forall\chi\in S_h,$$

它可还原成关于$u_h(t)$的弱形式。

$(u_{h,t},\chi)+A(t;u_h,\chi)=(f,\chi)$，$\forall\chi\in S_h$。

现在来证明，对于$\{T_h\}$的这种选取，上述条件是满足的。

引理1. 设$\{T_h\}$是由标准Galerkin方法定义的，$\{S_h\}$满足

$$\inf_{\chi\in S_h}\{\|V-\chi\|+h\|V-\chi\|_1\}\leqslant Ch^s\|V\|_s,\quad 1\leqslant s\leqslant r.$$

则(i)，(ii)和(iii)成立。

证明. 我们立刻有

$$(f,\ T_hf)=A_k(T_hf,\ T_hf)\geqslant C\|T_hf\|_1^2\geqslant 0,$$

由此证得条件(i)的第一部份，并且仅当$T_hf=0$时，等号成立。现在假设$T_hf=0$，且$f=\chi\in S_h$，利用T_h的定义，有

$$\|\chi\|^2=A_\kappa(T_h\chi,\chi)=0,$$

于是$\chi=0$，这就证明了条件(i)的第二部份。

现在讨论条件(ii)。用基本上与自共轭情形相同的方法，可以证明，

$$\|(T_h-T)f\|+h\|(T_h-T)f\|_1\leqslant ch^s\|f\|_{s-2},\quad 2\leqslant s\leqslant r,$$

$$A_\kappa(e,\chi)=0,\quad\forall\chi\in S_h,$$

这样，剩下只需证明关于时间导数的相应结果。为此，令$W=Tf$，$W_h=T_hf$，和$e=W_h-W$。对方程，

求微分，我们得到，

$$A_\kappa(e_t,\ \chi)+A'(e,\ \chi)=0,\ \forall\chi\in S_h,$$

其中双线性形式$A'(\cdot,\cdot)$是由$A(\cdot,\cdot)$对系数关于t进行微分得到的（注意$A'_\kappa(\cdot,\cdot)=A'(\cdot,\cdot)$），于是对任意的$\chi\in S_h$，有，

$$\|e_t\|_1^2 \leqslant CA_\kappa(e_t, e_t) = C\{A_\kappa(e_t, e_t + \chi) + A'(e, e_t + \chi) - A'(e, e_t)\},$$

由此推知

$$\|e_t\|_1^2 \leqslant C(\|e_t\|_1 + \|e\|_1)\inf_{\chi \in S_h}\|W_t - \chi\|_1 + C\|e\|_1 \cdot \|e_t\|_1,$$

从而不难得到

$$\|e_t\|_1 \leqslant C\{\|e\|_1 + \inf_{\chi \in S_h}\|W_t - \chi\|_1\} \leqslant Ch^{s-1}\{\|f\|_{s-2} + \|W_t\|_s\}$$

$$\leqslant Ch^{s-1}\{\|f\|_{s-2} + \|W\|_s\} \leqslant Ch^{s-1}\|f\|_{s-2}, \quad 2 \leqslant s \leqslant r.$$

这里我们用到了事实

$$\|W_t\|_s \leqslant C\|W\|_s,$$

这可以从$W_t \in H_0^1(\Omega)$是Dirichlet问题

$$A_\kappa(W_t, \varphi) = -A'(W, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

的解推知。

为了得到e_t的L_2模估计，设A_κ^*是A_κ的共轭，且ψ是

$$A_\kappa^*\psi = \varphi，于\Omega内，\psi = 0，在\partial\Omega上，$$

的解。已知

$$\|\psi\|_2 \leqslant C\|\varphi\|. \tag{3}$$

于是对任意$\chi \in S_h$，有

$$(e_t, \varphi) = A_\kappa(e_t, \psi) = A_\kappa(e_t, \psi - \chi) + A'(e, \psi - \chi) - A'(e, \psi)$$

最后一项利用Green公式，可得

$$|(e_t, \varphi)| \leqslant C(\|e_t\|_1 + \|e\|_1)\inf_{\chi \in S_h}\|\psi - \chi\|_1 + C\|e\|\|\psi\|_2$$

$$\leqslant C\{h(\|e_t\|_1 + \|e\|_1) + \|e\|\}\|\psi\|_2,$$

根据(3)式，得到

$$\|e_t\| \leqslant C\{h\|e_t\|_1 + \|e\|_1) + \|e\|\} \leqslant Ch^s\|f\|_{s-2}, \quad 2 \leqslant s \leqslant r.$$

这就完成了条件(ii)的证明。

设$V_h = T_h f$，$W_h = T_h g$，由定义

$$(T_hf,g)-(f,T_hg)=A_\kappa(,T_hg,T_hf)-A_\kappa(T_hf,T_hg)$$
$$=\int_\Omega\sum_i a_i\left(\frac{\partial W_h}{\partial x_i}V_h-\frac{\partial V_h}{\partial x_i}W_h\right)dx$$
$$=-\int_\Omega\sum_i\left(2a_i\frac{\partial V_h}{\partial x_i}W_h+\frac{\partial a_i}{\partial x_i}V_hW_h\right)dx$$
$$\leqslant C\|V_h\|_1\|W_h\|=C\|T_hf\|_1\|T_hg\|\leqslant C(f,T_hf)^{1/2}\|T_hg\|,$$
这就证明了条件(iii)。

至此，完成了引理的证明。

现在回到初边值问题(1)，(2)，作为 L_2 误差分析的开始，我们给出非齐次方程的如下简单结果，它与前边讨论的模型问题的结果是相类似的。

定理1. 假设(i)和(ii)成立，并设
$$\|V_h-V\|\leqslant Ch^r\|V\|_r,$$
那么，对于半离散问题，有误差估计，
$$\|u_h(t)-u(t)\|\leqslant Ch^r\{\|V\|_r+\int_0^t\|u_t\|_r ds\},\quad t\in I.$$

证明. 用上面的记号，令，
$$e(t)=\tilde{u}_h(t)-\tilde{u}(t)=e^{-\kappa t}(u_h(t)-u(t)),$$
则误差方程为
$$T_he_t+e=-\rho\equiv(T_h-T)A_\kappa\tilde{u}.$$
由第二章的引理 3，有
$$\|e(t)\|\leqslant\|e(0)\|+C\{\|\rho(0)\|+\int_0^t\|\rho_t\|ds\}.$$

再由(ii)，又有
$$\|\rho(0)\|\leqslant Ch^r\|A_\kappa V\|_{r-2}\leqslant Ch^r\|V\|_r,$$
和

$$\|\rho_t\| = \|\frac{d}{dt}((T_h - T)A_\kappa\tilde{u})\| \leqslant \|(T'_h - T')A_\kappa\tilde{u}\|$$

$$+\|(T_h - T)(A'\tilde{u} + A_\kappa\tilde{u}_t)\|$$
$$\leqslant Ch^r(\|\tilde{u}\|_r + \|\tilde{u}_t\|_r) \leqslant Ch^r(\|u\|_r + \|u_t\|_r).$$

由于 I 是有界的，从而

$$\int_0^t \|\rho_t\| ds \leqslant ch^r\{\|V\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds\},$$

这就完成了证明。

现在讨论齐次方程

$$u_t + Au = 0, \qquad 于\Omega\times I内,$$

再加上初边值条件(2)，其相应的半离散问题为求$u_h(t): I\to S_h$，使得$\tilde{u}_h(t) = e^{-\kappa t}u_h(t)$满足

$$T_h\tilde{u}_{h,t} + \tilde{u}_h = 0, \quad t\in I, \quad \tilde{u}_h(0) = V_h.$$

在这种情形，作为一个例子，我们只证明对于非光滑初值的如下结果：

定理2. 假设(i)，(ii)对于$r=2$情形，和(iii)成立，并且$V_h = P_0V$. 那么，对于半离散齐次抛物问题，有误差估计

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leqslant Ch^2t^{-1}\|V\|, \quad t\in I, \quad t>0.$$

在证明这个定理之前，先对于T_h的时间导数给出某些估计。

引理2. 假设(ii)对$r=2$成立，则有

$$|(T'_hf, f)| \leqslant C((T_hf, f) + h^2\|f\|^2),$$

和

$$\|T'_hf\| \leqslant C(\|T_hf\| + h^2\|f\|).$$

证明. 我们先证明连续情形的相应地估计，即

$$|(T'f, f)| \leqslant C(Tf, f),$$

和

$$\|T'f\| \leqslant C\|Tf\|.$$

这样，所期望的结果容易由(ii)得到。例如，对第一个不等式

$$|(T'_h f, f)| = |(T'f, f) + ((T'_h - T')f, f)|$$
$$\leqslant C((Tf, f) + h^2\|f\|^2) \leqslant C((T_h f, f) + h^2\|f\|^2).$$

对于连续情形的这些不等式，我们回忆

$$A_\kappa(Tf, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

微分以后，则有

$$A_\kappa(T'f, \varphi) + A'(Tf, \varphi) = 0.$$

注意，可以验证T在$L_2(\Omega)$上的共轭算子是T^*：$L_2(\Omega) \to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，它是由

$$A_\kappa(\varphi, T^*g) = (\varphi, g), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

来定义的。由于

$$(Tf, g) = A_\kappa(Tf, T^*g) = (f, T^*g), \quad \forall f, g \in L_2(\Omega).$$

所以T^*也就是椭圆算子A_κ^*所对应的Dirichlet问题的解算子。特别地，有

$$|(T'f, f)| = |A_\kappa(T'f, T^*f)| = |A'(Tf, T^*f)|$$
$$\leqslant C\|Tf\|_1\|T^*f\|_1 \leqslant C(f, Tf)^{1/2}(T^*f, f)^{1/2}$$
$$= C(f, Tf),$$

这就是欲证的第一个不等式。

进一步，对于$\varphi \in L_2(\Omega)$，

$$(T'f, \varphi) = A_\kappa(T'f, T^*\varphi) = -A'(Tf, T^*\varphi),$$

利用Green公式，把所有导数都移到第二个因子上，可得

$$|(T'f, \varphi)| \leqslant C\|Tf\|\|T^*\varphi\|_2 \leqslant C\|Tf\|\|\varphi\|,$$

这就证明了连续情形的第二个不等式。引理证完。

定理2的证明基于如下引理，它类似于第三章的引理5。

引理3. 假设(i)，(ii)对于$r=2$，和(iii)成立，且

$$T_h e_t + e = -\rho, \quad t \in I, \quad T_h e(0) = 0,$$

则对于每一个$\varepsilon > 0$，存在C_ε，使得对于$t \in I$有

$$\|e(t)\| \leqslant \varepsilon \sup_{s \leqslant t} (s\|\rho_t(s)\|) + C_\varepsilon \sup_{s \leqslant t} \|\rho(s)\|.$$

证明．我们将证明

$$\|e(t)\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{t}\int_0^t s^2 \|\rho_t\|^2 ds + C_\varepsilon \{\|\rho(t)\|^2 + \frac{1}{t}\int_0^t \|\rho\|^2 ds\},$$

这个估计式直接隐含着欲证的结论．为证明这个不等式，用$2te_t$乘误差方程，作某些整理以后，得到

$$2t(T_h e_t, e_t) + \frac{d}{dt}(t\|e\|^2) = -2\frac{d}{dt}(t(\rho, e))$$

$$+ 2(\rho, e) + 2t(\rho_t, e) + \|e\|^2,$$

由此，经过积分和一些显然的估计，导出

$$t\|e(t)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \int_0^t s^2 \|\rho_t\|^2 ds + C_\varepsilon \{t\|\rho(t)\|^2$$

$$+ \int_0^t (\|\rho\|^2 + \|e\|^2) ds\}.$$

为了完成证明，现在只要证明

$$\int_0^t \|e\|^2 ds \leqslant C \int_0^t \|\rho\|^2 ds. \tag{4}$$

为此用$2e$乘误差方程，于是得到

$$\frac{d}{dt}(T_h e, e) + 2\|e\|^2 = -2(\rho, e) + (T'_h e, e)$$

$$+ [(T_h e, e_t) - (T_h e_t, e)].$$

利用(iii)和误差方程，我们有

$$|(T_h e, e_t) - (T_h e_t, e)| \leqslant C(T_h e, e)^{1/2} \|T_h e_t\|$$

$$\leqslant C(T_h e, e)^{1/2} (\|\rho\| + \|e\|)$$

$$\leqslant C(T_h e, e) + C\|\rho\|^2 + \frac{1}{2}\|e\|^2,$$

又由引理2，对充分小的h，

$$|(T'_h e, e)| \leqslant C(T_h e, e) + \frac{1}{4}\|e\|^2.$$

因此，

$$\frac{d}{dt}(T_h e, e) + \|e\|^2 \leqslant C\{\|\rho\|^2 + (T_h e, e)\}.$$

根据 Gronwall 引理，$T_h e(0)=0$ 的假设，I的有界性以及$(T_h e, e)\geqslant 0$，即可推出(4)，从而完成引理的证明。

现在我们可以给出定理2的证明了。

定理2的证明。 已知误差$e=\tilde{u}_h-\tilde{u}=e^{-\kappa t}(u_h-u)$满足方程。

$$T_h e_t + e = -\rho, \quad t\in I.$$

由于$f=0$，所以这里

$$\rho = -(T_h - T)A_\kappa \tilde{u} = (T_h - T)\tilde{u}_t.$$

再注意，对于$V_h = P_0 V$，有$T_h e(0)=0$。由于$e(0)=P_0V-V$与S_h是直交的，通过(iii)，对于任意的$\chi\in S_h$，有

$$|(T_h e(0), \chi)| = |(T_h e(0), \chi) - (e(0), T_h \chi)|$$
$$\leqslant C(T_h e(0), e(0))^{1/2}\|T_h \chi\| = 0.$$

利用引理2，我们现在证明，对于$t\in I$，

$$(5)\quad \|e(t)\| \leqslant Ct^{-1}\sup_{s\leqslant t}\{s^2\|\rho_t\| + s\|\rho\| + \|R\| + h^2\|e\|\}.$$

其中

$$R(t) = \int_0^t \rho ds.$$

先让我们暂且假定这个不等式已经得证，据此来证明定理。为此将利用如下的已知事实，微分方程的精确解满足

（参见第三章引理2）

$$\|\tilde{u}(s)\| + s\|\tilde{u}_t(s)\| + s^2\|\tilde{u}_{tt}(s)\| \leqslant C\|V\|.$$

利用(ii)和这个正则性结果，我们有

$$s\|\rho(s)\| = s\|(T_h - T)\tilde{u}_t(s)\| \leqslant Ch^2 s\|\tilde{u}_t(s)\| \leqslant Ch^2\|V\|,$$

和

$$s^2\|\rho_t(s)\| \leqslant s^2\|(T'_h - T')u_t\| + s^2\|(T_h - T)\tilde{u}_{tt}\|$$
$$\leqslant Ch^2 s^2(\|\tilde{u}_t(s)\| + \tilde{u}_{tt}(s)\|) \leqslant Ch^2\|V\|.$$

由于

$$R(t) = \int_0^t (T_h - T)\tilde{u}_t ds = [(T_h - T)\tilde{u}(s)]_0^t - \int_0^t (T'_h - T')\tilde{u} ds,$$

又有

$$\|R(s)\| \leqslant Ch^2 \sup_{y<s}\|u(y)\| \leqslant Ch^2\|V\|,$$

另外，由解算子的稳定性，知

$$\|e(s)\| \leqslant \|\tilde{u}_h(t)\| + \|\tilde{u}(t)\| \leqslant 2\|V\|.$$

综合这些估计式，便得

$$\|e(t)\| \leqslant Ch^2 t^{-1}\|V\|,$$

这就证明了定理的结论。

为了证明(5)式，令$W = te$。我们证明

$$(6)\qquad \|W(t)\| \leqslant C\sup_{s<t}\{s^2\|\rho_t\| + s\|\rho\| + \|T_h e\|\},$$

然后进一步证明

$$(7)\qquad \|T_h e(t)\| \leqslant C\sup_{s<t}\{s\|\rho\| + \|R\| + h^2\|e\|\}.$$

这两个估计式合起来，即得(5)式。

对于(6)式，注意W满足

$$T_h W_t + W = \omega = -t\rho + T_h e.$$

利用误差方程和引理2，我们得到

$$\|\omega_t\| = \|-t\rho_t - \rho + T_h e_t + T'_h e\| \leqslant C(t\|\rho_t\| + \|\rho\| + \|e\|).$$

因此，由引理3，适当的选取ε，并注意$W(0)=0$，即知对$t\in I$，有

$$\|W(t)\|\leqslant\varepsilon\sup_{s<t}(s\|\omega_t(s)\|)+C_\varepsilon\sup_{s<t}\|\omega(s)\|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sup_{s<t}\|W(s)\|+C\sup_{s<t}\{s^2\|\rho_t\|+s\|\rho\|+\|T_h e\|\}.$$

据此式容易推出(6)式成立。

为证(7)式，我们积分误差方程，令$\varepsilon(t)=\int_0^t eds$并注意$T_h e(0)=0$，这样得到，

$$T_h e+\varepsilon\equiv T_h\varepsilon_t+\varepsilon=-R+\int_0^t T'_h eds.$$

因为$\varepsilon(0)=0$，我们可以再次利用引理3，得

$$\|\varepsilon(t)\|\leqslant\varepsilon\sup_{s<t}\{s\|R_t\|+s\|T'_h e\|\}$$

$$+C_\varepsilon\sup_{s<t}\{\|R\|+\|\int_0^s T'_h edy\|\},$$

利用引理2估计$T'_h e$，从而

$$\|\varepsilon(t)\|\leqslant\varepsilon\sup_{s<t}\{s\|\rho\|+Cs\|T_h e\|+Csh^2\|e\|\}$$

$$+C_\varepsilon\sup_{s<t}\|R\|+C_\varepsilon\int_0^t(\|T_h e\|+h^2\|e\|)ds.$$

由此可知

$$\|T_h e(t)\|\leqslant\|\varepsilon\|+\|R\|+\|\int_0^t T'_h eds\|$$

$$\leqslant\varepsilon Ct^\circ\sup_{s<t}\|T_h e(s)\|+C_\varepsilon\sup_{s<t}(s\|\rho\|+\|R\|$$

$$+h^2\|e\|)+C_\varepsilon\int_0^t\|T_h e\|ds.$$

选取ε使得$\varepsilon Ct^\circ<1$，这样一来，对于$t\in I=[0,t^\circ]$，有

$$\|T_h e(t)\|\leqslant C\sup_{s\leqslant t}(s\|\rho\|+\|R\|+h^2\|e\|)+C\int_0^t\|T_h e\|\,ds.$$

现在应用Gronwall引理，便得到所期望的不等式(7)。

至此，定理证毕。

参 考 文 献

这一章的材料是取自于[1]。对于有关的工作，亦可参看[2]。

1. M. Huang and V. Thomée, Some convergence estimates for semidiscrete type schemes for time—dependent nonselfadjoint parabolic equations, Math.Comput, 37, 327-346(1981).

2. P. H. Sammon, Convergence estimates for Semidiscrete parabolic equation approximations, SIAM J. Numer. Anal. 19, 68—92(1982).

第五章　最大模估计

还是考虑初边值问题

$$u_t - \Delta u = f,\qquad 于\Omega\times[0,\infty)内,$$
$$u = 0,\qquad 在\partial\Omega\times[0,\infty)上,$$
$$u(\cdot,0) = V,\qquad 于\Omega内,$$

此处，为了简单起见，假设Ω是一个光滑的平面凸区域。

象在第一章里那样，设$\mathscr{T}_h=\{\tau_j\}$是Ω的拟一致三角形部份，其边界顶点在$\partial\Omega$上，$S_h\subset H_0^1(\Omega)$表示关于$\mathscr{T}_h$的分片线性函数，它们在多边形区域$\Omega_h=\bigcup\limits_j\tau_j$以外为0。考虑相应的半离散问题：求$u_h:[0,\infty)\to S_h$，使得

$$(u_{h,t},\chi)+(\Delta u_h,\Delta\chi)=(f,\chi),\quad t\geqslant 0,\quad \forall\chi\in S_h,$$
$$u_h(0)=V_h\in S_h.$$

由第一章知道，利用由

$$(\Delta_h\psi,\chi)=-(\Delta\psi,\Delta\chi),\quad \forall\psi,\ \chi\in S_h,$$

定义的离散Laplace算子Δ_h和由L_2到S_h的正交投影算子P_0，半离散问题可以写成

$$u_{h,t}-\Delta_h u_h=P_0 f,\qquad t\geqslant 0,$$
$$u_h(0)=V_h.$$

引进齐次方程的解算子，即由Δ_h生成的半群$E_h(t)=\exp(t\Delta_h)$。我们知道L_2模的误差分析是基于这个算子在L_2中的稳定性，

$$\|E_h(t)V_h\|\leqslant\|V_h\|,\qquad \forall V_h\in S_h.$$

类似地，后面结果则是基于如下的“离散的弱最大模原

理”。这里和以后，我们用$\|\cdot\|_{L_p(\Omega_0)}$表示$L_p(\Omega_0)$中的模，或者，若$\Omega_0=\Omega$，则简单地记为$\|\cdot\|_{L_p}$。象以前那样，$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_s$分别表示$L_2(\Omega)$和$H^s(\Omega)$中的模。

定理1. 在现在的假设下，

$$\|E_h(t)V_h\|_{L\infty}\leqslant C\log\frac{1}{h}\|V_h\|_{L\infty},\qquad t\geqslant 0.$$

证明. 为了证明这个定理，我们引进“离散的δ—函数”$\delta_h^x\in S_h$，对于$x\in\Omega$，δ_h^x由下式定义

$$(\delta_h^x,\ \chi)=\chi(x),\qquad \forall\chi\in S_h,$$

并用

$$\Gamma_h^x(t)=E_h(t)\delta_h^x,$$

定义“离散的基本解”$\Gamma=\Gamma_h^x(t)\in S_h$，或等价地由下式定义，

$$\Gamma_{h,t}^x-\Delta_h\Gamma_h^x=0,\qquad t\geqslant 0,$$
$$\Gamma_h^x(0)=\delta_h^x.$$

对于$(x,t)\in\Omega\times[0,\ \infty)$，我们有

$$(E_h(t)V_h)(x)=(\Gamma_h^x(t),V_h).$$

事实上，由于$E_h(t)$是自共轭的，则有

$$(\Gamma_h^x(t),V_h)=(E_h(t)\delta_h^x,V_h)=(\delta_h^x,E_h(t)V_h)$$
$$=(E_h(t)V_h)(x).$$

由此可得

$$\|E_h(t)V_h\|_\infty\leqslant\sup_{x\in\Omega}\|\Gamma_h^x(t)\|_{L_1}\|V_h\|_\infty,$$

从而，为了证明定理，只须证明

$$\|\Gamma_h^x(t)\|_{L_1}\leqslant C\log\frac{1}{h},\ \forall x\in\Omega,\ t\geqslant 0.$$

现在引进修正的距离函数

$$w(y)=w_h^x(y)=(|x-y|^2+h^2)^{1/2}.$$

由Cauchy—Schwarz不等式，有

$$\|\Gamma_h^x\|_{L_1}\leqslant\|w^{-1}\|\,\|w\Gamma_h^x\|\leqslant C\,(\log\frac{1}{h})^{1/2}\,\|w\Gamma_h^x\|.$$

这是因为

$$\|w^{-1}\|^2=\int_\Omega w^{-2}\,dx\leqslant C\int_0^{\cdot}\frac{rdr}{r^2+h^2}=C\left[\frac{1}{2}\log(r^2+h^2)\right]_0^{\cdot}$$

$$\leq C\log\frac{1}{h}.$$

这样就只剩下证明L_2估计

$$(1)\qquad \|w_h^x\Gamma_h^x\|\leqslant C(\log\frac{1}{h})^{1/2}.$$

这将用能量法来完成。

我们要利用熟知的S_h的逆性质，例如

(2) $\|\chi\|_1\leqslant Ch^{-1}\|\chi\|,\qquad \forall\chi\in S_h.$

还需要如下的Descloux引理：

引理1. 存在一个正常数C，使得当τ_0是$\mathscr{T}_h$中的任一三角形，并且$\Omega_0\subset\Omega$与τ_0不相交时，对于$\operatorname{supp}V\subset\tau_0$的$V$，则有

(3) $\|P_0V\|_{L_2(\Omega_0)}\leqslant\exp(-c\operatorname{dist}(\Omega_0,\ \tau_0)h^{-1})\|V\|_{L_2}.$

进一步，存在正常数C，使得

$$(4)\qquad \|P_0V\|_{L_\infty}\leqslant C\|V\|_{L_\infty}$$

证明. 从$R_0=\tau_0$开始，我们逐次地取R_k为τ_h中与集合$\bigcup_{l<k}R_l$相邻的一些闭三角形的并集，来定义一串集合R_j，$j=0,1,\cdots$。显然，R_k中的点到τ_0有一个与kh同阶的距离。设$D_k=\bigcup_{l>k}R_l$，我们要证明，对于某个$\gamma>0$，

（5） $\|P_0V\|^2_{L_2(D_k)} \leqslant \gamma\|P_0V\|^2_{L_2(R_k)}, \quad k\geqslant 1$。

我们暂时假定这个不等式成立，并用q_k表示左端，则可看出

$$q_k \leqslant \gamma(q_{k-1} - q_k), \quad k\geqslant 1,$$

由此有

$$q_k \leqslant \frac{\gamma}{1+\gamma} q_{k-1} \leqslant \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^k q_0 \leqslant \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^k \|P_0V\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\leqslant \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^k \|V\|^2_{L_2(\tau_0)}.$$

对于使$D_k \supset \Omega_0$的最大整数k，令$\gamma/(1+\gamma) = e^{-2c}$，这证明了

$$\|P_0V\|_{L_2(\Omega_0)} \leqslant \|P_0V\|_{L_2(D_k)} \leqslant e^{-ck}\|V\|_{L_2(\tau_0)},$$

此即(3)式（c的选取可能不同）。

为了证明(5)式，注意，由于$\mathrm{supp}V \subset \tau_0$，

$(P_0V, \chi) = 0$，$\forall \chi \in S_h$满足$\mathrm{supp}\chi \subset D_{k-1} = D_k \cup R_k$，

$k\geqslant 1$。

特别是，可以选取$\bar\chi \in S_h$，使得在D_k内$\bar\chi = P_0V$，而在Ω_h / D_{k-1}内$\bar\chi = 0$，对于R_k中的三角形，$\bar\chi$在一个或两个顶点处与P_0V相等，而在余下的两个或一个顶点处取0值。这样，我们有

$$0 = (P_0V, \bar\chi) = \|P_0V\|^2_{L_2(D_k)} + \int_{R_k} P_0V \cdot \bar\chi dx,$$

从而，

$$\|P_0V\|^2_{L_2(D_k)} \leqslant \|P_0V\|_{L_2(R_k)} \|\bar\chi\|_{L_2(R_k)};$$

现在容易看到，对于R_k中的每一个三角形

$$\|\bar\chi\|_{L_2(\tau)} \leqslant \gamma\|P_0V\|_{L_2(\tau)},$$

于是可以结论(5)成立。

现在，通过证明L_∞模的稳定性 (4)，来完成引理的证明。设τ_0是使P_0V达到最大值的三角形，并且令V_j在 τ_j 上等于V，而在别处等于0，则有$V=\sum\limits_j V_j$，以及

$$\|P_0V\|_{L_\infty}=\|P_0V\|_{L_\infty(\tau_0)}\leqslant\sum_j\|P_0V_j\|_{L_\infty(\tau_0)}.$$

利用逆估计和(3)式，我们有

$$\begin{aligned}\|P_0V_j\|_{L_\infty(\tau_0)}&\leqslant ch^{-1}\|P_0V_j\|_{L_2(\tau_0)}\\&\leqslant Ch^{-1}\exp(-c\mathrm{dist}(\tau_0,\tau_j)h^{-1})\|V_j\|_{L_2(\tau_j)}\\&\leqslant C\exp(-C\mathrm{dist}(\tau_0,\tau_j)h^{-1})\|V\|_{L_\infty}.\end{aligned}$$

对于上面所定义的R_k，我们看到，R_k的三角形的个数不超过$\bigcup\limits_{l<k}R_l$的三角形的个数，并且以Ck^2为界，因此，

$$\begin{aligned}\|P_0V\|_{L_\infty}&<C(\sum_k\sum_{\tau_j\in R_k}e^{-ck})\|V\|_{L_\infty}\\&\leqslant C\sum_k k^2e^{-ck}\|V\|_{L_\infty}\leqslant c\|V\|_{L_\infty},\end{aligned}$$

这就完成了引理的证明。

为了完成不等式 (1) 的证明，我们需要三个附加的技术性引理。其中第一个是与Nitsche和 Schatz 的所谓超逼近性质 (参见[1]) 有关。

引理2. 存在一个正常数c，使得对于 $x\in\Omega$，$w=w_h^x$，和$\chi\in S_h$有

$$\|\nabla(w^2\chi-P_0(w^2\chi))\|\leqslant Ch\{\|\chi\|+\|w\nabla\chi\|\}.$$

证明 设$\varphi=I_h(w^2\chi)$是$w^2\chi$的插值。对于$\mathscr{T}_h$中的任意三角形τ，利用Leibniz规则和对于$|\alpha|=2$在τ内$D^\alpha\chi=0$的事实，有

$$\|w^2\chi-\varphi\|_{L_2(\tau)}+h\|\nabla(w^2\chi-\varphi)\|_{L_2(\tau)}$$
$$\leqslant Ch^2\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha(w^2\chi)\|_{L_2(\tau)}$$
$$\leqslant Ch^2\{\|\chi\|_{L_2(\tau)}+\|w\nabla\chi\|_{L_2(\tau)}\},$$
因此，通过平方并在$\mathscr{T}_h$的所有三角形上求和，可知这个不等式对Ω也成立。令$\varphi=P_0(w^2\chi)$，由逆估计(2)可见
$$\|\nabla(\varphi-\psi)\|\leqslant Ch^{-1}\|\varphi-\psi\|=Ch^{-1}\|P_0(\varphi-w^2\chi)\|$$
$$\leqslant Ch^{-1}\|\varphi-w^2\chi\|.$$
我们已经给出了最后这个量的估计，因此，由三角不等式即可得到所期望的估计式。

下一个引理表明，修正的距离函数，在某种意义上，补偿了离散δ—函数的“奇异性”。

引理3. 存在一个正常数C，使得对于$x\in\Omega$，
$$\|w_h^x\delta_h^x\|\leqslant C.$$

证明 对固定的x，令$w=w_h^x$，$\delta=\delta_h^x$，并设
$$\Omega_j=\{y\in\Omega_h;\ 2^{j-1}h<|x-y|\leqslant 2^jh\},\qquad j\geqslant 1,$$
$$\Omega_0=\{y\in\Omega_h;\quad |x-y|\leqslant h\}.$$
显然，
$$w(y)\leqslant Ch2^j,\ 对于y\in\Omega_j,$$
因此，
$$\|w\delta\|\leqslant C\sum_{j\geqslant 0}h2^j\|\delta\|_{L_2(\Omega_j)}.$$
为了估计$\|\delta\|_{L_2(\Omega_j)}$，设$\Phi\in c_0^\infty(\Omega_j)$和$\tau$是含$x$的三角形。那么，由逆估计和引理1所示的指数衰减性质，我们有
$$(\delta,\varphi)=(\delta,P_0\varphi)=(P_0\varphi)(x)\leqslant Ch^{-1}\|P_0\varphi\|_{L_2(\tau)}$$
$$\leqslant Ch^{-1}e^{-c2^j}\|\varphi\|_{L_2(\Omega_j)},$$
所以

$$\|\delta\|_{L_2(\Omega_j)} \leqslant Ch^{-1}e^{-c2^j}.$$

把它代入前面的不等式，即完成引理的证明。

我们知道，对于平面区域 Ω 上的函数，用 $H^1(\Omega)$模去控制最大模的 Sobolev型引理刚好失效。然而，对于 S_h 中的函数，作为替代我们有如下不等式：

引理4. 存在一个常数C，使得

$$\|\chi\|_{L_\infty} \leqslant C\left(\log\frac{1}{h}\right)^{1/2}\|\nabla\chi\|, \quad \forall\chi\in S_h.$$

证明 由Sobolev引理，存在与$p>2$无关的常数C，使得

$$\|\chi\|_{L_p} \leqslant Cp^{1/2}\|\nabla\chi\|, \quad \forall\chi\in S_h.$$

另一方面，我们有逆估计

$$\|\chi\|_{L_\infty} \leqslant Ch^{-2/p}\|\chi\|_{L_p}。$$

选取$p=\log\frac{1}{h}$，由这些估计式即可证明引理。

现在回到定理1的证明上来，这已经归结为证明(见(1))：对于前面所定义的$\Gamma=\Gamma_h^x(t)$和$w=w_h^x$，有

$$\|w\Gamma\| \leqslant C(\log 1/h)^{1/2}.$$

考虑表达式

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\Gamma\|^2+\|w\nabla\Gamma\|^2=(\Gamma_t, w^2\Gamma)$$

$$+(\nabla\Gamma,\nabla(w^2\Gamma))-2(\nabla\Gamma, w\Gamma\nabla w)。$$

利用Γ的定义，对任意的$\psi\in S_h$，有

$$(\Gamma_t,\psi)+(\nabla\Gamma,\nabla\psi)=0,$$

因此，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\Gamma\|^2+\|w\nabla\Gamma\|^2=(\Gamma_t, w^2\Gamma-\psi)$$

$$+(\nabla\Gamma,\nabla(w^2\Gamma-\psi))-2(\nabla\Gamma,\nabla\omega.\omega\Gamma)=I_1+I_2+I_3.$$

现在选$\psi = P_0(w^2\Gamma)$，则$I_1 = 0$，并由引理 2 和逆性质(2)，

$$|I_2| \leqslant \|\nabla\Gamma\|\|\nabla(w^2\Gamma - \psi)\| \leqslant Ch^{-1}\|\Gamma\| Ch(\|\Gamma\| + \|w\nabla\Gamma\|) \leqslant C(\|\Gamma\|^2 + \|\Gamma\|\|w\nabla\Gamma\|).$$

其次，由于∇w有界，

$$|I_3| \leqslant C\|\Gamma\|\|w\nabla\Gamma\|.$$

这些估计式合起来，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\Gamma\|^2 + \|w\nabla\Gamma\|^2 \leqslant C(\|\Gamma\|^2 + \|\Gamma\|\|w\nabla\Gamma\|)$$

或者

$$d/dt\|w\Gamma\|^2 + \|w\nabla\Gamma\|^2 \leqslant C\|\Gamma\|^2,$$

于是

$$\|w\Gamma(t)\|^2 + \int_0^t \|w\nabla\Gamma\|^2 ds \leqslant \|w\delta_h^x\|^2 + C\int_0^t \|\Gamma\|^2 ds.$$

根据引理3，现在只剩下证明

$$\int_0^t \|\Gamma\|^2 ds \leqslant C\log\frac{1}{h}.$$

为此目的，象以前一样，令$T_h = (-\Delta_h)^{-1}$，于是Γ满足

$$T_h\Gamma_t + \Gamma = 0, \quad 对t \geqslant 0, \quad \Gamma(0) = \delta_h^x.$$

这表明

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(T_h\Gamma, \Gamma) + \|\Gamma\|^2 = 0,$$

或者

$$\frac{1}{2}(T_h\Gamma, \Gamma) + \int_0^t \|\Gamma\|^2 ds = \frac{1}{2}(T_h\delta_h^x, \delta_h^x) = \frac{1}{2}(T_h\delta_h^x)(x).$$

令$G_h^x = T_h\delta_h^x$，因为T_h是半正定的，这样只须证明

$$G_h^x \leqslant C\log 1/h.$$

函数G_h^x实际上是一个离散Green函数，我们有

$$(\nabla G_h^x, \nabla \chi) = (\nabla T_h \delta_h^x, \nabla \chi) = (\delta_h^x, \chi) = \chi(x), \quad \forall \chi \in S_h.$$

特别地，

$$G_h^x(\chi) = \|\nabla G_h^x\|^2.$$

根据引理4，这表明

$$G_h^x \leqslant C(\log\frac{1}{h})^{1/2}\|\nabla G_h^x\| = C(\log\frac{1}{h}G_h^x(x))^{1/2}$$

或

$$G_h^x \leqslant C\log\frac{1}{h}.$$

至此完成了定理1的离散弱最大模原理的证明。

现在应用上面的稳定性结果以获得一个误差估计。为此，我们还需要知道 Scott—Nitsche 给出的椭圆问题的一个最大模误差估计，其中椭圆投影P_1定义为

$$(\nabla P_1 V, \nabla \chi) = (\nabla V, \nabla \chi), \quad \forall \chi \in S_h.$$

我们这里只引用而不证明此估计。

引理5 在上面关于Ω和S_h的假设下，对于椭圆投影P_1有

$$\|P_1 V - V\|_{L_\infty} \leqslant Ch^2 \log\frac{1}{h}\|V\|_{W_\infty^2(\Omega)},$$

其中

$$\|V\|_{W_\infty^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant 2}\|D^\alpha V\|_{L_\infty}.$$

由此可以证明：

定理2 在现在的假设下，并且选取V_h使得

$$\|V_h - V\|_{L_\infty} \leqslant Ch^2 \log\frac{1}{h}\|V\|_{W_\infty^2(\Omega)},$$

那么，对于半离散抛物问题的误差有

$$\|u_h(t)-u(t)\|_{L_\infty}\leqslant Ch^2(\log\frac{1}{h})^2\{\|V\|_{W^2_\infty(\Omega)}+\int_0^t\|u_t\|_{W^2_\infty(\Omega)}ds\}.$$

证明 和前面一样，令

$$u_h-u=(u_h-P_1u)+(P_1u-u)=\theta+\rho.$$

由引理5，我们有

$$\|\rho(t)\|_{L_\infty}\leqslant Ch^2\log\frac{1}{h}\|u(t)\|_{W^2_\infty(\Omega)}$$

$$\leqslant Ch^2\log\frac{1}{h}\{\|V\|_{W^2_\infty(\Omega)}+\int_0^t\|u_t\|_{W^2_\infty(\Omega)}ds\},$$

其次，利用关系式$P_0\Delta=\Delta_hP_1$，有

$$\theta_t-\Delta_h\theta=-P_0\rho_t,\qquad t\geqslant 0,$$

由 Duhamel 原理，

$$\theta(t)=E_h(t)\theta(0)-\int_0^tE_h(t-s)P_0\rho_t(s)ds.$$

这里，由定理1可得

$$\|E_h(t)\theta(0)\|_{L_\infty}\leqslant C\log\frac{1}{h}\|V-P_1V\|_{L_\infty}$$

$$\leqslant Ch^2(\log\frac{1}{h})^2\|V\|_{W^2_\infty(\Omega)},$$

同时应用引理1，又有

$$\|E_h(t-s)P_0\rho_t(s)\|_{L_\infty}\leqslant C\log\frac{1}{h}\|\rho_t(s)\|_{L_\infty}$$

$$=C\log\frac{1}{h}\|(P_1-I)u_t(s)\|_{L_\infty}$$

$$\leqslant Ch^2(\log\frac{1}{h})^2\|u_t\|_{W^2_\infty(\Omega)}.$$

这样就完成了定理2的证明。

对于齐次方程的情形，给出类似于第三章所描述的 L_2 模误差估计的结果是可能的。这里我们只概述一下如下的关于非光滑初值的结果，它表明，对于适当选取的 V_h，甚至在 V 仅属于 $L_1(\Omega)$ 的情形，按最大模和对于正的 t 仍然有基本上最佳的收敛阶。详细的讨论可在[1]中找到。

定理3 在我们现在的假设下，并设 $V_h = P_0 V$。则对于任意的 $\varepsilon>0$，半离散抛物问题的误差满足估计式

$$\|u_h(t)-u(t)\|_{L_\infty}\leqslant c_\varepsilon h^{2-3\varepsilon}t^{-2+\varepsilon}\|V\|_{L_1},\quad t>0.$$

注意，即使 $V\in L_1(\Omega)$，$P_0V\in S_h$ 也可由下式定义

$$(P_0V,\chi)=(V,\chi),\qquad \forall\chi\in S_h.$$

为了证明定理，这时我们令

$$u_h-u=(u_h-P_0u)+(P_0u-u)=\eta+\zeta.$$

利用 P_0 在 L_∞ 中的有界性和已知的关于热传导方程的正则性估计，按照所要求的方式去估计最后一项是不困难的。事实上，利用 $\chi\in S_h$，可得

$$\|P_0u-u\|_{L_\infty}\leqslant\|P_0(u-\chi)-(u-\chi)\|_{L_\infty}$$

$$\leqslant C\inf_{\chi\in S_h}\|u-\chi\|_{L_\infty}\leqslant Ch^2\|u\|_{W^2_\infty(\Omega)},$$

并且后边的那个函数模在时刻 t 差不多可用 $t^{-2}\|V\|_{L_1}$ 来控制。这里我们略去技术上的细节。

对于 $\eta\in S_h$，利用 $P_0\Delta=\Delta_hP_1$ 的事实，我们有

$$\eta_t-\Delta_h\eta=\Delta_h(P_0-P_1)u=-\Delta_hP_0\rho,\quad t\geqslant0,$$

此处 $\rho=(P_1-I)u$。这里的 $\eta(0)=0$，于是通过积分，

$$\eta(t)=-\int_0^t E_h(t-s)\Delta_hP_0\rho(s)ds.$$

为了证明我们的结果，只须证明

$$(6)\quad \|E_h(t-s)\Delta_h P_0\rho(s)\|_{L_\infty}$$

$$\leqslant C_\varepsilon h^{2-6\varepsilon}t^{-1}(t-s)^{-1+\varepsilon}s^{-1+\varepsilon}\|V\|_{L_1}$$

因为这将隐含着

$$\|\eta(t)\|_{L_\infty}\leqslant C_\varepsilon h^{2-6\varepsilon}t^{-1}\int_0^t (t-s)^{-1+\varepsilon}s^{-1+\varepsilon}ds\|V\|_{L_1},$$

$$=C_\varepsilon h^{2-6\varepsilon}t^{-2+2\varepsilon}\|V\|_{L_1}.$$

为了证明(6)，我们将需要关于半群$E_h(t)$的两个稳定性结果、椭圆投影的某些误差估计以及热传导方程的正则性估计。

第一个稳定性估计是用以表明$E_h(t)$关于L_∞为解析半群的事实。回忆

$$(E_h(t)V_h)(x)=(\Gamma_h^x(t),V_h).$$

引理6 我们有

$$\left\|\frac{d}{dt}E_h(t)V_h\right\|_{L_\infty}\leqslant C\frac{\log\frac{1}{h}}{t}\|V_h\|_{L_\infty}\quad t>0.$$

这个引理可用定理1那样的方法来证明。首先对$\Gamma=\Gamma_h^x(t)$，证明

$$t\|\Gamma_t(t)\|_{L_1}\leqslant C\log\frac{1}{h},$$

然后通过引进离散距离函数$w=w_h^x$，证明L_2估计

$$t\|w\Gamma_t(t)\|\leqslant C(\log\frac{1}{h})^{1/2}.$$

后一估计式可用类似于定理1的能量法导出。这里就不详细讨论了。

下边的引理是以初值的L_1模来控制解的最大模。

引理7 我们有

$$\|E_h(t)V_h\|_{L_\infty}\leqslant C\frac{\log\frac{1}{h}}{t}\|V_h\|_{L_1},\quad t>0.$$

实际上，这个结果的证明，要比定理 1 和引理 6 的纯粹 L_∞ 结果的证明稍微简单一些，并且不需要利用加权模。这时要证明

$$t\|\Gamma(t)\|_{L_\infty}\leqslant C\log\frac{1}{h}.$$

由定义Γ的方程，我们有

$$\frac{d}{dt}(t\|\Gamma\|^2)+2t\|\nabla\Gamma\|=\|\Gamma\|^2,$$

利用定理1证明中的一个估计式，由此可得

$$t\|\Gamma(t)\|^2\leqslant\int_0^t\|\Gamma\|^2ds\leqslant C\log\frac{1}{h},$$

或者

$$\|\Gamma(t)\|\leqslant C\left(\frac{\log\frac{1}{h}}{t}\right)^{1/2}.$$

这就证明了

$$\|E_h(t)V_h\|_{L_\infty}\leqslant C\left(\frac{\log\frac{1}{h}}{t}\right)^{1/2}\|V_h\|.$$

由于

$$(t\Gamma)_t-\Delta_h(t\Gamma)=\Gamma,$$

故有

$$t\Gamma(t)=\int_0^t E_h(t-s)\Gamma(s)ds,$$

于是，由前边的估计，有

$$t\|\Gamma(t)\|_{L_\infty}\leqslant C\int_0^t\left(\frac{\log\frac{1}{h}}{t-s}\right)^{1/2}\|\Gamma(s)\|ds$$

$$\leqslant C\log\frac{1}{h}\int_0^t(t-s)^{-1/2}s^{-1/2}ds=C\log\frac{1}{h},$$

此即所要证明的估计式。

现在让我们回到(6)的证明。除了上面的稳定性估计外，我们需要如下已知误差估计，

$$\|(P_1-I)V\|_{L_p}\leqslant C_\varepsilon h^{2-\varepsilon}\|V\|_{W_p^2(\Omega)}=C_\varepsilon h^{2-\varepsilon}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\|D^\alpha V\|_{L_p},$$

$$1\leqslant p\leqslant\infty,\qquad \varepsilon>0.$$

(对于 $p=\infty$，由引理5知道 $h^{-\varepsilon}$ 可用 $\log 1/h$ 代替；可以证明，对于 $p=1$ 和通过插值从而对所有 $p\in[1,\infty)$，$h^{-\varepsilon}$ 可用 $(\log 1/h)^3$ 代替。)由于Δ在 L_p 上生成一个解析半群，再在最后一步，利用对连续基本解的简单估计，那么，对于 $1<p<\infty$ 可以结论

$$(7)\quad \|\rho(s)\|_{L_p}\leqslant C_\varepsilon h^{2-\varepsilon}\|u(s)\|_{W_p^2(\Omega)}$$

$$\leqslant C_{\varepsilon,p}h^{2-\varepsilon}\|\Delta u(s)\|_{L_p}$$

$$=C_{\varepsilon,p}h^{2-\varepsilon}\|u_t(s)\|_{L_p}$$

$$\leqslant C_{\varepsilon,p}h^{2-\varepsilon}s^{-1}\|u(s/2)\|_{L_p}$$

$$\leqslant C_{\varepsilon,p}h^{2-\varepsilon}s^{-2+1/p}\|V\|_{L_1}.$$

作为一个启发式论证，虽然不十分严格，但是几乎是正确的，现在假设(7)对于 $p=1,\infty$ 也成立。那么，由引理6及已知事实 $E_h(t)\Delta_h=E'_h(t)$，便有

$$\|E_h(t-s)\,\Delta_h P_0\rho(s)\|_{L_\infty} \leqslant C\log\frac{1}{h}(t-s)^{-1}\|P_0\rho(s)\|_{L_\infty}$$

$$\leqslant Ch^{2-2\varepsilon}(t-s)^{-1}s^{-2}\|V\|_{L_1}.$$

类似地，利用引理6和7，以及根据P_0在 L_1 中的有界性（这可由引理1得到），则有

$$\|E_h(t-s)\,\Delta_h P_0\rho(s)\|_{L_\infty}$$

$$\leqslant C\log\frac{1}{h}(t-s)^{-1}\|E_h((t-s)/2)P_0\rho(s)\|_{L_\infty}$$

$$\leqslant C\left(\log\frac{1}{h}\right)^2(t-s)^{-2}\|P_0\rho(s)\|_{L_1}$$

$$\leqslant Ch^{2-2\varepsilon}(t-s)^{-2}s^{-1}\|V\|_{L_1},$$

于是，由分别考虑$0\leqslant s<t/2$和$t/2\leqslant s\leqslant t$，我们得到

$$\|E_h(t-s)\,\Delta_h P_0\rho(s)\|_{L_\infty} \leqslant C_\varepsilon h^{2-2\varepsilon}t^{-1}(t-s)^{-1}s^{-1}\|V\|_{L_1}.$$

通过稍许地减小椭圆投影误差估计(7)中h的幂次，我们可以降低s和$t-s$的负幂并且同时把 $p=1$ 和∞ 情形包含在最后的估计中，以便得到估计式(6)。综合这些技巧，即可完成定理 3 的证明。

参 考 文 献

上面的分析取自〔1〕，它要求Ω是二维的，在〔1〕中可以找到进一步的技术细节的讨论。在〔2〕中对椭圆算子是一维的情形给出了一个类似地分析。对于更一般情形的最大模分析，也可参看〔3〕，〔4〕和〔5〕。

1. A. H. Schatz, V. Thomée, and L. B. Wahlbin, Maximum norm stability and error estimates in parabolic finite element equations. Commun. Pure Appl. Math.

33, 265—304(1980).

2. V. Thomée and L.B.Wahlbin, Maximum-Norm stability and error estimates in Galerkin methods for parabolic equations in one space variable. Numer. Math. 41, 345—371(1983).

3. M. Dobrowolski, L^∞-convergence of linear finite element approximations to quasilinear initial boundary value problems. RAIRO, Anal. Numer. 12, 247—266(1978).

4. M.Dobrowolski, L^∞-convergence of linear finite element approximations to nonlinear parabolic problems. SIAM J. Numer. Anal. 17, 663—674(1980).

5. J.A.Nitsche and M.F.Wheeler, L_∞-boundedness of the finite element Galerkin operator for parabolic problems. Numer. Funct. Anal. Optimization 4, 325—353 (1981—82).

第六章　负模估计和超收敛

设Ω是R^d中具有光滑边界$\partial\Omega$的区域，考虑Dirichlet问题

$$Au=f,\quad 于\Omega内,$$

$$u=0,\quad 在\partial\Omega上,$$

其中椭圆算子A如下式定义，

$$Au=-\sum_{j,k=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+a_0u,$$

这里系数是x的光滑函数，(a_{jk})正定，并且a_0在$\bar{\Omega}$上是非负的，这个边值问题的弱形式可以叙述为

$$A(u,\varphi)=(f,\varphi),\quad 对于\varphi\in H_0^1(\Omega),$$

其中

$$A(u,v)=\int_\Omega\left(\sum_{j,k=1}a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_j}+a_0uv\right)dx.$$

（我们选取如上形式的算子A来讨论，而不取Laplace算子，目的是为了以后的应用。）

设$\{S_h\}$表示$H_0^1(\Omega)$的一族有限维子空间，它满足：对于$r>2$，

$$\inf_{\chi\in S_h}\{\|V-\chi\|+h\|V-\chi\|_1\}\leqslant Ch^s\|V\|_s,$$

$$V\in H_0(\Omega)\cap H^s(\Omega),\quad 1\leqslant s\leqslant r.$$

这里象以前那样，$\|\cdot\|_s=\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$。可再次设立标准Galerkin有限元问题：寻求$u_h\in S_h$，使得

$$A(u_h,\chi)=(f,\chi),\quad \forall\chi\in S_h.$$

（为了具体起见，我们先就$S_h\subset H_0^1(\Omega)$的情形讨论，然后

借用前边描述的近似解算子 T_h，将结果推广到一般的情形。）

用和以前完全一样的方法，可以证明：

定理1. 离散椭圆问题有唯一解 $u_h\in S_h$，并且有误差估计

$$\|u_h-u\|+h\|u_h-u\|_1\leqslant Ch^q\|u\|_q,\quad 1\leqslant q\leqslant r.$$

我们将看到，对于 $r>2$，上面用于证明 L_2 模误差估计的对偶论证方法，也可用于推导负模的误差估计。令

$$\|V\|_{H^{-s}(\Omega)}=\sup\left\{\frac{(V,\varphi)}{\|\varphi\|_s};\ \varphi\in H^s(\Omega)\right\}.$$

我们要证明：

定理2. 对于半离散椭圆问题，有误差估计

$$\|u_h-u\|_{H^{-s}(\Omega)}\leqslant ch^{q+s}\|u\|_q,\quad 0\leqslant s\leqslant r-2,\quad 1\leqslant q\leqslant r.$$

证明. 对于 $e=u_h-u$，我们来证明

$$|(e,\varphi)|\leqslant Ch^{q+s}\|u\|_q\|\varphi\|_s,\quad \forall\varphi\in H^s(\Omega),$$

此式直接隐含着欲证的估计式。为了证明这个不等式，我们引进边值问题

$$A\psi=\varphi,\qquad 于\Omega内,$$
$$\psi=0,\qquad 在\partial\Omega上$$

的解 $\psi=T\varphi$。已知，

$$\|\psi\|_{s+2}\leqslant s\|\varphi\|_s,\quad 对任意s\geqslant0.$$

利用误差与 S_h 关于内积 $A(\cdot,\cdot)$ 的正交性质，有

$$(e,\varphi)=(e,A\psi)=A(e,\psi)=A(e,\psi-\chi),\quad \forall\chi\in S_h,$$

因此，对于 $0\leqslant s\leqslant r-2$，

$$|(e,\varphi)|\leqslant C\|e\|_1\inf_{\chi\in S_h}\|\psi-\chi\|_1\leqslant Ch^{s+1}\|e\|_1\|\psi\|_{s+2}$$

$$\leqslant Ch^{s+1}\|e\|_1\cdot\|\varphi\|_s.$$

再由定理1，

$$\|e\|_1 \leqslant Ch^{q-1}\|u\|_q,$$

由此得到欲证的估计式。

特别是，注意到$s=r-2$，$q=r$ 的情形，此时定理2的结果为

$$\|u_h-u\|_{H^{-(r-2)}(\Omega)} \leqslant Ch^{2r-2}\|u\|_r.$$

注意，当$r>2$时，由于$2r-2>r$，故在此估计式中 h 的方次比通常L_2模误差估计$O(h^r)$中的要高。

请注意，定理2的误差估计也可表示为

$$\|(P_1-I)u\|_{H^{-s}(\Omega)} \leqslant Ch^{q+s}\|u\|_q,$$

$$\text{对于} 0 \leqslant s \leqslant r-2, \quad 1 \leqslant q \leqslant r,$$

其中$P_1: H_0^1(\Omega) \to S_h$是由下式定义的椭圆投影算子，

$$A(P_1 u, \chi) = A(u, \chi), \quad \forall \chi \in S_h.$$

其次，这时相应的椭圆问题近似解算子 $T_h: L_2(\Omega) \to S_h$ 则为

$$A(T_h f, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h,$$

并且有

$$\|(T_h-T)f\|_{H^{-s}(\Omega)} \leqslant Ch^{q+2+s}\|f\|_q, \quad \text{对于} 0 \leqslant s, q \leqslant r-2.$$

同时，第二章和第三章里用过的性质(i)和(ii)，现在仍然成立，也就是

(i) T_h在$L_2(\Omega)$上是自共轭、半正定的，并在S_h上正定，

(ii) $\|(T_h-T)f\| \leqslant Ch^s\|f\|_{s-2}$，　对于$2 \leqslant s \leqslant r$，
$f \in H^{s-2}(\Omega)$。

作为负模误差估计的一个非常简单的应用，假定我们感兴趣于估计积分

$$F(u) = \int_\Omega u\psi dx,$$

其中$u=Tf$是椭圆问题的真解，ψ是$H^{r-2}(\Omega)$中的一个给定的函数。那么，如果考虑显然的近似

$$F(u_h)=\int_\Omega u_h\psi dx,$$

则有误差估计

$$\|F(u_h)-F(u)\|=\|(u_h-u,\psi)\|\leqslant C\|u_h-u\|_{H^{-(r-2)}(\Omega)}\|\psi\|_{r-2}$$
$$\leqslant Ch^{2r-2}\|u\|_r\|\psi\|_{r-2},$$

这是一个阶为$O(h^{2r-2})$的超收敛估计。

我们再来考虑一个超收敛的例子，这个例子是针对两点边值问题($d=1$)

$$Au=-\frac{d}{dx}(a_{11}\frac{du}{dx})+a_0u=f,\ 于(0,1)内,$$

$$u(0)=u(1)=0。$$

对于分划$0=x_0<x_1<\cdots<x_M=1$，$x_{i+1}-x_i\leqslant h$，定义相应的有限维空间，

$$S_h=\{\chi\in c([0,1]);\chi|_{(x_i,x_{i+1})}\in \amalg_{r-1},\chi(0)=\chi(1)=0\},$$

其中$\amalg_{r-1}$表示次数不超过$r-1$的多项式集合。显然，这族空间满足通常的逼近假设。

设$g=g_{\bar{x}}$表示两点边值问题的在分点$\bar{x}$处具有奇性的Green函数，于是

$$W(\bar{x})=A(W,g),\ 对任意W\in H_0((0,1))。$$

特别是，对离散解u_h的误差$e=u_h-u$，则有

$$e(\bar{x})=A(e,g)=A(e,g-\chi),\ \forall\chi\in S_h。$$

故有

$$|e(\bar{x})|\leqslant C\|e\|_1\inf_{\chi\in S_h}\|g-\chi\|_1。$$

注意到，虽然$g_{\bar{x}}$不是光滑函数，但是仍然可以用S_h中的函

数做较好的逼近，因为，它除$\bar{x}$点以外是光滑的，而导数在$\bar{x}$处的不连续性，也是与 S_h中函数的性质相适应的。特别有

$$\inf_{\chi\in S_h}\|g-\chi\|_1\leqslant Ch^{r-1}(\|g\|_{H^r(0,\bar{x})}+\|g\|_{H^r(\bar{x},1)})\leqslant Ch^{r-1}.$$

从而，有

$$|e(\bar{x})|\leqslant Ch^{2r-2}\|u\|_r,$$

可见，在分划的节点处出现超收敛性。

这后一个例子，对本章所讨论的A的更一般形式来说，是恰当的；当$A=-d^2/dx^2$时，g_x在$\bar{x}$点外是线性的，所以$g_x\in S_h$。由此可以推出，$e(\bar{x})=0$，这是一个退化情形，它显示的并非我们要证的超收敛现象。

对于正整数s，我们定义如下负模

$$\|V\|_{-s}=(T^sV,V)^{1/2},$$

同以前一样，其中T表示椭圆问题的精确解算子。对于抛物问题的误差分析，我们用这个负模代替前面引进的负模是方便的。令

$$\dot{H}^s(\Omega)=\{\psi\in H^s(\Omega);A^j\psi=0,\text{在}\partial\Omega\text{上},\ j<s/2\},$$

则有如下结果：

引理1. 模$\|V\|_{-s}$等价于$\sup\{(V,\psi)/\|\psi\|_s;\psi\in\dot{H}^s(\Omega)\}$。

证明. 事实上，设A的特征值和正交特征函数为$\{\lambda_j\}_1^\infty$和$\{\varphi_j\}_1^\infty$(满足Dirichlet边界条件)，则与通常的Sobolev 模$\|\cdot\|_s$，$s\geqslant 0$等价的一种模是（参见第三章引理1）

$$\|V\|_{H^s(\Omega)}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^s(V,\varphi_j)^2\right)^{1/2},$$

并且立即可知

$$\|V\|_{-s}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-s}(V,\varphi_j)^2\right)^{1/2},$$

由于

$$\sup\left\{\frac{(V,\psi)}{\|\psi\|_{\dot{H}^s(\Omega)}};\psi\in\dot{H}^s(\Omega)\right\}$$

$$=\sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(V,\varphi_j)(\psi,\varphi_j);\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^s(\psi,\varphi_j)^2\leqslant 1\right\}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^s(V,\varphi_j)^2\right)^{1/2},$$

故引理得证。

由引理1，下式成立

$$\|V\|_{-s}\leqslant c\|V\|_{H^{-s}(\Omega)},$$

所以定理2直接隐含如下结果：

引理2. 我们有

$\|(P_1-I)V\|_{-s}\leqslant ch^{q+s+2}\|V\|_{q+2}$, $0\leqslant s$, $q\leqslant r-2$,

对$V\in H^{q+2}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$。

特别地，注意到

$$\|(P_1-I)V\|_{-(r-2)}\leqslant ch^{2r-2}\|V\|_r,$$

则对于T_h和T，有

(ii)′ $\|(T_h-T)f\|_{-s}\leqslant ch^{s+q+2}\|f\|_q, 0\leqslant s, q\leqslant r-2,$

$$f\in H^q(\Omega).$$

为了证明关于抛物问题的类似的负模误差估计，注意T_h是半正定的，故可引进“离散负模”

$$\|V\|_{-s,h}=(T_h^sV,V)^{1/2}$$

（它在$L_2(\Omega)$上实际仅是半模），以及伴随的（半）内积

$$(V,W)_{-s,h}=(T_h^sV,W).$$

如下的引理表明，这个离散负模除一个很小的误差外，等价于相应的连续负模。

引理3. 对于$0\leqslant s\leqslant r$，有

(1) $$\|V\|_{-s,h}\leqslant C\{\|V\|_{-s}+h^s\|V\|\}$$

(2) $$\|V\|_{-s}\leqslant C\{\|V\|_{-s,h}+h^s\|V\|\}.$$

证明。首先用关于s的归纳法来证明(1)式。结论对$s=0$成立，并且对于$s=1$也是明显成立的，因为

$$\|V\|^2_{-s,h}=(T_hV,V)=(TV,V)+((T_h-T)V,V)$$
$$\leqslant\|V\|^2_{-1}+Ch^2\|V\|^2,$$

这里我们利用了(ii)′.现在设$1\leqslant s\leqslant r-1$，并设直到$s$，(1)式已证，则有

$$\|V\|_{-(s+1),h}=\|T_hV\|_{-(s-1),h}$$
$$\leq\|TV\|_{-(s-1),h}+\|(T_h-T)V\|_{-(s-1),h},$$

由归纳法的假设，

$$\|TV\|_{-(s-1),h}\leqslant C\{\|TV\|_{-(s-1)}+h^{s-1}\|TV\|\}$$
$$=C\{\|V\|_{-(s+1)}+h^{s-1}\|V\|_{-2}\}.$$

应用上面模的谱表示式，容易证明

$$\|V\|_{-2}\leqslant C\{h^2\|V\|+h^{-(s-1)}\|V\|_{-(s+1)}\},$$

于是

$$\|TV\|_{-(s-1),h}\leqslant C\{\|V\|_{-(s+1)}+h^{s+1}\|V\|\}.$$

其次，由归纳法的假设和(ii)′，取$q=0$（记住$s-1\leqslant r-2$），

$$\|(T_h-T)V\|_{-(s-1),h}\leqslant C\{\|(T_h-T)V\|_{-(s-1)}$$
$$+h^{s-1}\|(T_h-T)V\|\}\leqslant Ch^{s+1}\|V\|.$$

由此(1)式得证。

通过T和T_h的位置对调，类似地可以证明(2)式。引理证毕。

现在来研究我们关心的抛物问题，

$$u_t+Au=f,\quad 于\Omega\times[0,\infty)内,$$
$$u=0,\quad 在\partial\Omega\times[0,\infty)上,$$
$$u(x,0)=V(x),\quad 于\Omega内。$$

并且建立相应的半离散问题

$$(u_{h,t}, \chi) + A(u_h, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h,$$
$$u_h(0) = V_h \in S_h.$$

我们来证明如下的结果。

定理3. 设$0 \leqslant s \leqslant r-2$，并且假设$V_h \in S_h$满足
$$\|V_h - V\|_{-s} + h^s \|V_h - V\| \leqslant Ch^{s+r} \|V\|_r.$$
那么，对于半离散抛物问题，有如下误差估计

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{-s} \leqslant Ch^{s+r}\{\| V\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds\}.$$

证明. 由前面的分析，已知$e = u_h - u$满足
$$T_h e_t + e = -\rho, \quad 其中\rho = (P_1 - I)u,$$
并且，如果T_h关于半内积$(\cdot,\cdot)$是非负的，则对于相应的半模$\|\cdot\|$还有（第二章的引理3）

$$\|e(t)\| \leqslant \|e(0)\| + C\{\|\rho(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\| ds\}.$$

现在注意到
$$(T_h V, V)_{-s,h} = (T_h^{s+1} V, V) \geqslant 0,$$
故可以结论

$$\|e(t)\|_{-s,h} \leqslant \|e(0)\|_{-s,h} + C\{\|\rho(0)\|_{-s,h} + \int_0^t \|\rho_t\|_{-s,h} ds\}.$$

由引理3和定理中的假设，有
$$\|e(0)\|_{-s,h} \leqslant Ch^{s+r} \|V\|_r.$$
其次，
$$\|\rho\|_{-s,h} \leqslant C\{\|\rho\|_{-s} + h^s \|\rho\|\} \leqslant ch^{s+r} \|V\|_r,$$
特别地，
$$\|\rho(0)\|_{-s,h} \leqslant Ch^{s+r} \|V\|_r,$$
并且类似地有

$$\|\rho_t\|_{-s,h} \leqslant ch^{s+r}\|u_t\|_r.$$

这就证明了

$$\|e(t)\|_{-s,h} \leqslant ch^{s+r}\{\|V\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds\},$$

从而

$$\|e(t)\|_{-s} \leqslant c\{\|e(t)\|_{-s,h} + h^s\|e(t)\|\}$$

$$\leqslant ch^{s+r}\{\|V\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds\},$$

定理证毕。

用通常方法选取的初始值，例如$V_h = P_0V$和$V_h = P_1V$，是满足上面的假设的。在下边的应用中，还需要$t>0$对误差的时间导数的负模估计。为了简单起见，仅对$V_h = P_0V$的情形讨论。

定理4. 设$j \geqslant 0$，$0 \leqslant s \leqslant r-2$，以及$V_h = P_0V$，那么，对于半离散抛物问题的误差，当$t \geqslant \delta > 0$时，有

$$\|D_t^j(u_h(t) - u(t))\|_{-s} \leqslant ch^{r+s}\{\sum_{l=0}^{j}\|D_t^l u(t)\|_r$$

$$+ \int_{t-\delta}^{t}\|D_t^{j+1}u\|_r ds + \int_0^t \|u_t\|_{s+2} ds\}.$$

我们不详细地去证明这个定理了。仅指出这定理的证明要利用第三章定理 5 的证明思想，将解乘以一个截断函数，这样就可以分别地考虑一个是解u在$(0, t-\delta/2)$上取0值和另一个是解u在$(t-\delta, t)$上取0值的问题。对于其中第一个问题，通过微分，由定理 3 可以得到对误差的时间导数的一个估计。对于第二个问题，要利用下述用谱表示容易建立的事实：对于齐次半离散方程

$$T_h u_{h,t} + u_h = 0$$

的解，有

$$\|D_t^j u_h(t)\|_{-s,h} \leqslant C\|u_h(t-\delta/2)\|_{-(j-2),h}.$$

利用逆估计，或者利用通常的能量法，也可以证明对于误差梯度的类似的估计。于是，综合起来，对任意$j\geqslant 0$，有
$\|D_t^j(u_h(t)-u(t))\|_{-s}\leqslant C(t,u)h^{r+s}$，$t>0$，$-1\leqslant s\leqslant r-2$。

现在我们来证明，如果更细致地选取初始值，则可以使得时间导数的误差估计式直到$t=0$都一致地成立。为此我们来考虑$u_h^{(j)}=D_t^j u_h$对于固定$j\geqslant 1$所满足的半离散方程，首先选取初始值V_h为

$$(3) \qquad u_h^{(j)}(0)=P_0 u^{(j)}(0),$$

于是可以对$u_h^{(j)}$应用定理3。引进离散椭圆算子$A_h=T_h^{-1}$：$S_h\to S_h$，那么，对于u_h有

$$u_{h,t}+A_h u_h=P_0 f,\ t\geqslant 0,$$

由对时间微分，有

$$u_{h,t}^{(j)}+A_h u_h^{(j)}=P_0 f^{(j)},\ t\geqslant 0.$$

对于初始值，由$u_h^{(j-1)}$，…，u_h所满足的方程，有

$$\begin{aligned}u_h^{(j)}(0)=u_{h,t}^{(j-1)}(0)&=-A_h u_h^{(j-1)}+P_0 f^{(j-1)}(0)\\&=A_h^2 u_h^{(j-2)}-A_h P_0 f^{(j-1)}(0)+P_0 f^{(j-2)}(0)\\&=\cdots\\&=(-1)^j A_h^j V_h+\sum_{l=0}^{j-1}(-1)^{j-1-l}A_h^{j-1-l}P_0 f^{(l)}(0).\end{aligned}$$

用T_h^j乘上式，再利用微分方程，可得

$$V_h=(-1)^j T_h^j u_h^{(j)}(0)-T_h^j\sum_{l=0}^{j-1}(-1)^{l+1}A_h^{j-1-l}P_0(u^{(l+1)}(0)$$
$$+Au^{(l)}(0)).$$

已知$T_hP_0=T_h$和$P_1=T_hA$，故上式又可以写成

$$V_h=P_0V+\sum_{l=0}^{j-1}(-1)^lT_h^lP_0(P_1-I)u^{(l)}(0)$$

$$+(-T_h)^j(u_h^{(j)}(0)-P_0u^{(j)}(0)).$$

由此看出，条件(3)等价于选取

$$(4)\quad V_h=P_0V+\sum_{l=0}^{j-1}(-1)^lT_h^lP_0(P_1-I)u^{(l)}(0).$$

注意$u^{(l)}(0)$可以由微分方程计算出来。

在定理3中，V_h的另一种可能的选择是P_1V，这时代替(3)式可以要求关系式

$$(5)\qquad u_h^{(j)}(0)=P_1u^{(j)}(0).$$

这致使(4)式中的求和增添一附加项，即

$$(6)\qquad V_h=P_0V+\sum_{l=0}^{j}(-1)^lT_h^lP_0(P_1-I)u^{(l)}(0)$$

$$=P_1V+\sum_{l=1}^{j}(-1)^lT_h^l(P_1-I)u^{(l)}(0).$$

(4)和(6)式中所使用的离散初始值的结构形式，在Douglas，Dupont和Wheeler的分析〔2〕中，被称之为拟投影。

现在我们可以证明如下的结果。

定理5. 设$j>0$，$0\leqslant s\leqslant r-2$，并且假设$V_h$是由(4)或(6)式给出的。那么，对于半离散抛物问题的误差，当$0\leqslant i\leqslant j, t\geqslant 0$，时，有

$$\|D_t^i(u_h(t)-u(t))\|_{-s}\leqslant Ch^{r+s}\left\{\sum_{l=i}^{j}\|D_t^l u(0)\|_{\max(r-2(l-i),s+2)}\right.$$

$$\left.+\int_0^t\|D_t^{j+1}u\|_r ds\right\}.$$

证明。对于$i=j$,将定理3用于$D_t^j u_h=u_h^{(j)}$和$D_t^j u=u^{(j)}$,并注意(3)和(5)式成立,估计式便立即得到。现在设$0\leqslant i<j$,并且首先考虑用(4)式选择初始值的情形。此时,可令$u_h=\tilde{u}_h+\tilde{\tilde{u}}_h$,其中$\tilde{u}_h$和$\tilde{\tilde{u}}_h$分别地满足

$$\tilde{u}_{h,t}+A_h\tilde{u}_h=P_0f,\qquad t\geqslant 0,$$

$$\tilde{u}_h(0)=P_0V+\sum_{l=0}^{i-1}(-1)^l T_h^l P_0(P_1-I)u^{(l)}(0),$$

和

$$\tilde{\tilde{u}}_{h,t}+A_h\tilde{\tilde{u}}_h=0,$$

$$(7)\quad \tilde{\tilde{u}}_h(0)=\sum_{l=i}^{L-1}(-1)^l T_h^l P_0(P_1-I)u^{(l)}(0).$$

根据上面的构造,知$\tilde{u}_h^{(i)}(0)=P_0u^{(i)}(0)$。从而,由刚刚证明的定理4,有

$$(8)\quad \|\tilde{u}_h^{(i)}(t)-u^{(i)}(t)\|_{-s}\leqslant Ch^{r+s}\{\|D_t^i u(0)\|_r$$

$$+\int_0^t\|D_t^{i+1}u\|_r ds\}.$$

进一步,由引理3和按模$\|\cdot\|_{-s,h}$和$\|\cdot\|$的稳定性质,

$$\begin{aligned}\|\tilde{\tilde{u}}_h^{(i)}(t)\|_{-s}&\leqslant C\{\|\tilde{\tilde{u}}_h^{(i)}(t)\|_{-s,h}+h^s\|\tilde{\tilde{u}}_h^{(i)}(t)\|\}\\&\leqslant C\{\|\tilde{\tilde{u}}_h^{(i)}(0)\|_{-s,h}+h^s\|\tilde{\tilde{u}}_h^{(i)}(0)\|\}\\&=C\{\|A_h^i\tilde{\tilde{u}}_h(0)\|_{-s,h}+h^s\|A_h^i\tilde{\tilde{u}}_h(0)\|\}.\end{aligned}$$

现在,对于$i\leqslant l\leqslant j-1$,有

$$A_h^i T_h^l P_0(P_1-I)u^{(l)}(0)=T_h^{l-i}P_0(P_1-I)u^{(l)}(0),$$

并可结论（注意，对于$s>0$，$\|P_0V\|_{-s,h}=\|V\|_{-s,h}$）

$$\|\tilde{u}_h^{(j)}(t)\|_{-s}\leqslant C\sum_{l=i}^{j-1}\{\|(P_1-I)u^{(l)}(0)\|_{-(s+2(l-i)),h}$$

$$+h^s\|(P_1-I)u^{(l)}(0)\|_{-2(l-i),h}\}。$$

因为，由引理2和引理3有

$$\|(P_1-I)V\|_{-(s+q),h}\leqslant Ch^{r+s}\|V\|_{r-q}，\text{当}s+q\leqslant r-2\text{时，}$$

和

$$\|(P_1-I)V\|_{-(s+q),h}\leqslant\|(P_1-I)V\|_{-(r-2),h}$$

$$\leqslant Ch^{r+s}\|V\|_{s+2}，\text{当}s+q>r-2\text{时，}$$

或者

$$\|(P_1-I)V\|_{-(s+q),h}\leqslant Ch^{r+s}\|V\|_{\max(r-q,s+2)},$$

由此推出

$$(9)\quad\|\tilde{u}_h^{(i)}(t)\|_{-s}\leqslant Ch^{r+s}\sum_{l=i}^{j-1}\|u^{(l)}(0)\|_{\max(r-2(l-i),s+2)}。$$

(8)和(9)式合起来便证明了当V_h按(4)式选取时定理的结论。当V_h按(6)式给出时，(7)与(9)式中的求和要扩展到j，定理的结论亦得证。

其次是直到$t=0$都一致成立的H^1估计，这个结果可以通过一个逆估计来导出，或者，当V_h选得满足(5)式时，可以利用通常的能量法来推导.我们简单考察一下后一种情况。

定理6. 设$j>0$，并且假设V_h由(6)式给出。那么，当$0\leqslant i\leqslant j$，$t\geqslant0$时，半离散抛物问题的误差满足

$$\|D_t^i(u_h(t)-u(t))\|_1\leqslant Ch^{r-1}\{\|D_t^iu(t)\|_r$$

$$+\sum_{l=i+1}^{j}\|D_t^lu(0)\|_{\max(r-2(l-i),1)}+\left(\int_0^t\|D_t^{i+1}u\|_{r-1}^2\,ds\right)^{1/2}\}。$$

证明. 首先考虑$i=j$的情形，并且令

$$u_h - u = (u_h - P_1 u) + (P_1 u - u) = \theta + \rho,$$

则有

$$(\theta_t^{(j)}, \chi) + A(\theta^{(j)}, \chi) = -(\rho_t^{(j)} \chi), \quad t \geqslant 0, \quad \forall \chi \in S_h,$$

由(5)式，这里$\theta^{(j)}(0)=0$。令$\chi=\theta_t^{(j)}$，用通常的能量法可以证明

$$\|\theta^{(j)}(t)\|_1 \leqslant C\left(\int_0^t \|\rho_t^{(j)}\|^2 ds\right)^{1/2} \leqslant Ch^{r-1}\left(\int_0^t \|D_t^{j+1} u\|_{r-1}^2 ds\right)^{1/2}.$$

由于

$$\|\rho^{(j)}(t)\|_1 \leqslant ch^{r-1}\|D_t^j u\|_r,$$

由此可以结论

$$\|u_h^{(j)}(t) - u^{(j)}(t)\|_1 \leqslant Ch^{r-1}\left\{\|D_t^j u(t)\|_r + \left(\int_0^t \|D_t^{j+1} u\|_{r-1}^2 ds\right)^{1/2}\right\},$$

这就是$i=j$时定理的结果。对于$0 \leqslant i \leqslant j$情形，可以令$\theta=(u_h - P_1 u)+u_h=\theta+u_h$，其中

$$(u_{h,t}, \chi) + A(u_h, \chi) = 0, \quad t \geqslant 0, \forall x \in S_h,$$

$$u_h(0) = \sum_{l=i+1}^{j} (-1)^l T_h^l (P_1 - I) u^{(l)}(0).$$

由于$u_h^{(i)}(0)=P_1 u^{(i)}(0)$，象上面一样，对于$u_h - u = \theta + \rho$，我们得到

$$\|u_h^{(i)}(t) - u^{(i)}(t)\|_1 \leqslant ch^{r-1}\{\|D_t^i u(t)\|_r + \int_0^t \|D_t^{i+1} u\|_{r-1}^2 ds)^{1/2},$$

以及对于u_h，有

$$\|\tilde{\tilde{u}}_h^{(i)}(t)\|_1 \leqslant C\|\tilde{\tilde{u}}_h^{(i)}(0)\|_1 \leqslant C\|A_h^i \tilde{\tilde{u}}_h(0)\|_1$$
$$\leqslant C \sum_{l=i+1}^{j} \|T_h^{l-i}(P_1 - I)u^{(l)}(0)\|_1.$$

由于

$$\|T_h^{l-i} w\|_1 \leqslant C\|\nabla T_h^{l-i} w\| = C(T_h^{l-i-1} w,\ T_h^{l-i} w)^{1/2}$$
$$= C\|w\|_{1-2(l-i),h}$$

故可推出

$$\|\tilde{\tilde{u}}^{(i)}(t)\|_1 \leqslant C \sum_{l=i+1}^{j} \|(P_1 - I)u^{(l)}(0)\|_{1-2(l-i),h}$$
$$\leqslant Ch^{r-1} \sum_{l=i+1}^{j} \|u^{(l)}(0)\|_{\max(r-2(l-i),1)},$$

这就证明了定理。

把上面的估计用于一维问题的 C^0 元情形，可以得到超收敛结果。

考虑问题

(10) $u_t + Au = f$，于$(0,1)\times[0,\infty)$内，

$u = 0$，在$x = 0, 1$处，

$u(x,0) = V(x)$，于$(0,1)$内，

其中 $Au = -\dfrac{d}{dx}(a_{11}\dfrac{du}{dx}) + a_0 u$。设$u_h(t)$表示属于

$$S_h = \{\chi \in C([0,1]);\ \chi|_{(x_j, x_{j+1})} \in \Pi_{r-1}, \chi(0) = \chi(1) = 0\},$$

的近似解，这里对$[0,1]$的剖分如前所述。则有 如下 结果。

定理7. 设$\bar{x}$是一个剖分节点。则对于任意 $n \geqslant 0$，(10) 的半离散近似解的误差$e = u_h - u$满足

$$|e(\bar{x},t)| \leqslant C\{h^{r-1}\sum_{j=0}^{n}\|D_t^j e\|_1 + h^r\|D_t^{n+1}e\| + \|D_t^{n+1}e\|_{-2n}\}.$$

由前面的误差估计立即可知，这个估计式表示，在适当的正则性假设下，对任意$t>0$，有

$$|u_h(\bar{x},t)-u(\bar{x},t)|\leqslant C(t,u)h^{2r-2}.$$

定理7的证明。和以前一样，设$g=g_{\bar{x}}$是A的满足零边值条件和在点$\bar{x}$处奇异的Green函数，于是对于任意$V\in H_0^1(0,1)$，

$$V(\bar{x})=A(V,g).$$

令

$$L(u,V)=(u_t,V)+A(u,V).$$

利用精确解算子T的定义，有

$$\begin{aligned}e(\bar{x},t)&=A(e,g)=L(e,g)-(e_t,g)=L(e,g)-A(e_t,Tg)\\&=L(e,g)-L(e_t,Tg)+(e_{tt},Tg)\\&=\sum_{j=0}^{n}(-1)^jL(D_t^je,T^jg)+(-1)^{n+1}(D_t^{n+1}e,T^ng).\end{aligned}$$

由上面的定义可知，

$$\begin{aligned}L(e,\chi)&=(e_t,\chi)+A(e,\chi)=\{(u_{h,t},\chi)+A(u_h,\chi)\}\\&\quad-\{(u_t,\chi)+A(u,\chi)\}=(f,\chi)-(f,\chi)=0,\end{aligned}$$

由此可结论，对于$\chi\in S_h$，

$$\begin{aligned}e(\bar{x},t)&=\sum_{j=0}^{n}(-1)^jL(D_t^je,T^jg-\chi_j)\\&\quad+(-1)^{n+1}(D^{n+1}e,T^ng).\end{aligned}$$

和对于适当选取的χ_j，

$$\begin{aligned}|L(D_t^je,T^jg-\chi_j)|&\leqslant\inf_{\chi\in S_h}\{\|D_t^{j+1}e\|\|T^jg-\chi\|\\&\quad+\|D_t^je\|_1\|T^jg-\chi\|_1\}\leqslant C\{h^r\|D_t^{j+1}e\|+h^{r-1}\|D_t^je\|_1\},\end{aligned}$$

此处，在最后一步我们用到了T^jg在$\bar{x}$点以外的地方是连续和光滑的事实。最后有

$$|(D_t^{n+1}e, T^n g)| = |(T^n D_t^{n+1}e, g)| \leqslant C\|T^n D_t^{n+1}e\|$$
$$= C\|D_t^{n+1}e\|_{-2r},$$

定理得证。

参 考 文 献

上面所介绍的内容取自[1]。对于有关的资料，也可参看[2]。

1. V. Thomée, Negative norm estimates and superconvergence in Galerkin methods for parabolic problems. Math. Comput. 34, 93—113(1980).

2. J. Douglas, Jr., T. Dupont and M. F. Wheeler, A quasi-projection analysis of Galerkin methods for parabolic and hyperbolic equations. Math. Comput. 32, 345—362(1978).

第七章　对于齐次方程的全离散格式

现在考虑关于齐次方程

$$u_t = \Delta u, \qquad 于\Omega\times[0,\infty)内，$$

的单步全离散方法，初边值条件为

$$u = 0, \qquad 在\partial\Omega\times[0,\infty)上，$$

$$u(x,0) = V(x), \; 于\Omega内，$$

其中Ω是R^d中具有光滑边界$\partial\Omega$的有界域。

象在第二章和第三章里那样，假设给定了$L_2 = L_2(\Omega)$的一个子空间族S_h，和一个逼近$T = (-\Delta)^{-1}$的相应算子族$T_h: L_2 \to S_h$，且具有性质

(i)　T_h是自共轭的，在L_2上是半正定的，并在S_h上为正定，

(ii)　$\|(T_h - T)f\| \leqslant Ch^{s+2}\|f\|_s$，对于$0 \leqslant s \leqslant r-2$，$f\in H^s(\Omega)$。

回忆相应的半离散问题：寻求$u_h: [0,\infty)\to S_h$，使得

$$u_{h,t} = \Delta_h u_h, \qquad t\geqslant 0,$$

$$u_h(0) = V_h,$$

这里，在S_h上$\Delta_h = -T_h^{-1}$。由于这个问题的解算子$E_h(t)$为指数函数$\exp(t\Delta_h)$，所以很自然地利用递推关系

(1)　　$$U_{n+1} = r(k\Delta_h)U_n, \; n = 0, 1, \cdots,$$

$$U_0 = V_h \in S_h,$$

来定义在S_h中的$t_n = nk$时刻的离散解U_n，其中k是时间步长，$r(\lambda)$是指数函数e^λ的一个有理逼近。在整个这一章里，

我们将假设此逼近的阶是$p\geqslant 1$，或者说

$$r(\lambda)=e^{\lambda}+O(\lambda^{p+1}),\text{ 当}\lambda\to 0\text{时。}$$

此外，还将假设$r(\lambda)$在负实轴上满足一定的有界性条件。特别地，$r(k\lambda)$在Δ_h的任一特征值上没有极点，从而，由U_n通过(1)式可以唯一的确定S_h中的一个元素U_{n+1}。

解释关系式(1)的一个方法是利用谱表达式。为此，设$\{\Lambda_i\}_1^{N_h}$是S_h上的正定算子$-\Delta_h$的特征值，$\{\Phi_i\}_1^{N_h}\in S_h$是相应的正交标准特征函数。则对任意$V_h\in S_h$，有

$$V_h=\sum_{j=1}^{N_h}(V_h,\Phi_j)\Phi_j,$$

并且有

$$U_n=r(k\Delta_h)^n V_h=\sum_{j=1}^{N_h}r(-k\Lambda_j)^n(V_h,\Phi_j)\Phi_j\ .$$

让我们注意，如果

$$\max_j|r(-k\Lambda_j)|\leqslant 1,$$

那么，格式(1)在L_2中是稳定的，并由 Paraseval 等式立即得

$$\|U_n\|^2\leqslant\sum_{j=1}^{N_h}|(V_h,\Phi_j)|^2=\|V_h\|^2.$$

下边采用的所有格式都将满足这个条件。

由于习惯上宁愿考虑给定的是T_h，而不是Δ_h，所以有时把$r(k\Delta_h)$表示成T_h的有理函数是方便的，这相当于在μ的有理函数$r(-k/\mu)$中令$\mu=T_h$。假设这个函数具有如下的形式

$$r(-k/\mu)=\alpha_0\prod_i(\mu-\beta_i)/\prod_i(\mu-r_i),$$

则递推关系式(1)可改写成

$$\prod_j (T_h - \gamma_j) U_{n+1} = \alpha_0 \prod_j (T_h - \beta_j) U_n.$$

因此，当T_h给定时，为了由U_n确定U_{n+1}，则只需解一系列关于W的方程

$$(\alpha T_h + \beta) W = (\gamma T_h + \delta) V, \tag{2}$$

其中V是给定的。要注意，即使有理函数$r(\lambda)$具有实系数α, β, γ, δ，而V和W也可能是复值的（对于负函数f，$I_h f$可以认为是通过线性关系定义的）。

例如，考虑标准Galerkin方法情形，于是$S_h \subset H_0^1(\Omega)$，和$T_h$由下式定义

$$(\nabla T_h f, \nabla \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h.$$

此时，(2)可以表示为

$$\alpha(W, \chi) + \beta(\nabla W, \nabla \chi) = \gamma(V, \chi) + \delta(\nabla V, \nabla \chi)$$
$$\forall \chi \in S_h.$$

若$\{\varphi_j\}_1^{N_h}$是S_h的一组基底，$A = ((\varphi_j, \varphi_k))$和$B = ((\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_k))$是相应的质量和刚度矩阵，并且，若$\xi$和$\eta$分别表示$V$和$W$关于$\{\varphi_j\}_1^{N_h}$的系数向量，则上面的方程也可以写成矩阵形式

$$(\alpha A + \beta B)\eta = (\gamma A + \delta B)\xi.$$

特别地，对于

$$r(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda}$$

则有

$$r(-k/\mu) = \frac{1}{1+k/\mu} = \frac{\mu}{\mu+k},$$

于是(1)化为

$$(T_h + k) U_{n+1} = T_h U_n,$$

或者

$$(U_{n+1},\chi)+k(\nabla U_{n+1},\nabla\chi)=(U_n,\chi),\quad \forall\chi\in S_h,$$

这是在第一章中讨论的对时间离散化的向后Euler方法。类似地，对于

$$r(\lambda)=\frac{1+\frac{1}{2}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda},$$

则得到Crank-Nicolson格式

$$(U_{n+1}\chi)+\frac{1}{2}k(\nabla U_{n+1},\nabla\chi)=(U_n,\chi)-\frac{1}{2}k(\nabla U_n\nabla\chi),$$

$$\forall\chi\in S_h.$$

现在来讨论时间离散化的分类。首先，我们说逼近e^λ的有理函数$r(\lambda)$分别为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ或Ⅳ类型的，如果

Ⅰ： $|r(\lambda)|<1$，对于某$-\alpha>0$，$-\alpha<\lambda<0$，

Ⅱ： $|r(\lambda)|<1$，对于$\lambda<0$，

Ⅲ： $|r(\lambda)|<1$，对于$\lambda<0$，且$|r(\infty)|<1$，

Ⅳ： $|r(\lambda)|<1$，对于$\lambda<0$，且$r(\infty)=0$。

注意，这些条件是依次更加严格的限制。

现在根据$r(\lambda)$的这些条件，对离散格式（1）进行分类，总假设关于T_h的条件(i)和(ii)成立。在某些情形，还需要另外增加对(1)中参数h和k之间关系的限制。更确切地说，我们称离散格式(1)分别是Ⅰ′型或Ⅱ′型的，如果

Ⅰ′：$r(\lambda)$是Ⅰ类的，并且$k\Lambda_{max}\leqslant\alpha_0$，$0<\alpha_0<\alpha$，

Ⅱ′：$r(\lambda)$是Ⅱ类的，并且$k\Lambda_{max}\leqslant\alpha_1$，$0<\alpha_1<\infty$，

其中Λ_{max}为$-\Delta_h$的最大特征值。说一个格式是Ⅱ、Ⅲ或Ⅳ型的，仅指相应的$r(\lambda)$是属于Ⅱ、Ⅲ或Ⅳ类的，而对k和Λ_{max}的关系不加任何限制。

关于Ⅰ′和Ⅱ′型格式，请注意如下事实，若分别地令 $\lambda_0=\alpha_0$ 和 α_1，则对于 $0<\lambda\leqslant\lambda_0$ 有 $|r(-\lambda)|<1$，又由于当 $\lambda\to 0$ 时，$r(-\lambda)=\exp(-\lambda+0(\lambda))$，故有

$$|r(-\lambda)|\leqslant e^{-c\lambda}，对于 0<\lambda\leqslant\lambda_0，\ c>0。$$

特别地，由于 $k\Lambda_j\leqslant\lambda_0$，所以

$$|r(-k\Lambda_j)|\leqslant e^{-ck\Lambda_j},\quad j=1,\cdots,n_h,\quad c>0。$$

这个事实将在下边的证明中反复用到。

为了使条件 $k\Lambda_{max}\leqslant\lambda_0$ 满足，只须

$$\Lambda_{max}\leqslant\kappa_0 h^{-2}, \tag{3}$$

此外还要求 $k/h^2\leqslant\lambda_0/\kappa_0$。例如，对于标准 Galerkin 方法，(3)可由逆不等式

$$\|\nabla\chi\|\leqslant C_0h^{-1}\|\chi\|,\qquad \forall\chi\in S_h$$

得到；实际上，若令 $\kappa_0=C_0^2$，则有

$$\begin{aligned}\Lambda_j&=\Lambda_j(\Phi_j,\Phi_j)=-(\Delta_h\Phi_j,\Phi_j)=\|\nabla\Phi_j\|^2\\&\leqslant C_0^2h^{-2}\|\Phi_j\|^2=\kappa_0h^{-2}.\end{aligned}$$

下面列举一些由Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ和Ⅳ类有理函数定义的格式的例子。

Padé格式：分别地由 e^λ 的 Padé 逼近表中上对角线，对角线，以及下对角线上的表值所给定的Ⅰ，Ⅱ和Ⅳ类有理函数的例子。事实上，在 e^λ 的Padé逼近表中，一般表值是由

$$r_{\mu,\nu}(\lambda)=\frac{n_{\mu,\nu}(\lambda)}{d_{\mu,\nu}(\lambda)},$$

给出的，其中

$$n_{\mu,\nu}(\lambda)=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\mu+\gamma-j)!\gamma!}{(\mu+\gamma)!j!(\gamma-j)!}\lambda^j, \tag{4}$$

和

(5) $$d_{\mu,\nu}(\lambda)=\sum_{j=0}^{\mu}\frac{(\mu+\nu-j)!\mu!}{(\mu+\gamma)!j!(\mu-j)!}\lambda^{j}.$$

由Padé逼近的定义，有

(6) $$r_{\mu,\nu}(\lambda)=e^{\lambda}+O(\lambda^{\mu+\nu+1}),\ 当\lambda\to0时,$$

所以$r_{\mu,\nu}(\lambda)$逼近e^{λ}的阶为$P=\mu+\nu$。熟知，并由(4)和(5)式也可清楚地看到，当$\mu=\gamma$时，$r_{\mu,\nu}(\lambda)$是Ⅱ类，$\mu>\gamma$时，$r_{\mu,\nu}(\lambda)$是Ⅳ类，当$\mu<\gamma$时，由(6)$r_{\mu,\nu}(\lambda)$显然是Ⅰ类。

特别地，

$$r_{0,1}(\lambda)=1+\lambda,$$

这是$\alpha=2$的Ⅰ类有理函数。它相应于全离散的向前Euler格式

$$U_{n+1}=U_n+k\Delta_h U_n,$$

或者，如果Δ_h是由标准Galerkin方法所定义，则有

$$(U_{n+1},\chi)=(U_n,\chi)-k(\nabla U_n,\nabla\chi),\quad \forall\chi\in S_h.$$

由逆假设可知

$$\Lambda_{\max}\leqslant\kappa_0 h^{-2},$$

所以，当

$$k/h^2\leqslant\alpha_0/\kappa_0,\quad \alpha_0<2$$

时，上述方程定义了一个I型格式。

具有线性分母的子对角线和对角线Padé逼近是

$$r_{1,0}(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda}和r_{1,1}(\lambda)=\frac{1+\frac{1}{2}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda}.$$

它们分别相应于前边讨论的向后Euler格式和Crank-Nicolson格式，它们分别是Ⅳ型和Ⅱ型的。

作为具有$r(\infty)\neq0$的Ⅲ型格式的一个例子，我们考虑由

$$r(\lambda)=1+\frac{\lambda}{1-b\lambda}-\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\lambda}{1-b\lambda}\right)^2,\quad b=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

定义的所谓Calahan格式。实际上，因为

$$r(-\lambda)=1-\frac{\lambda}{1+b\lambda}-\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\lambda}{1+b\lambda}\right)^2,$$

可视为递增函数 $\lambda/(1+b\lambda)$ 的递减函数，故它在 $(0,\infty)$ 上是递减的，从而 $r(\lambda)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是递增函数。因此，为证此格式属于Ⅲ类，只需证明

$$r(\infty)>-1.$$

这里，对于 $b=\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{3}}{3})$，我们有

$$r(\infty)=1-\frac{1}{b}-\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{b^2}=1-\frac{2}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{2}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^2=1-\sqrt{3}>-1.$$

简单地计算表明

$$r(\lambda)-e^{\lambda}=O(\lambda^4),\qquad \text{当}\lambda\to 0\text{时},$$

所以相应的格式是3阶精度的。这个格式的一个优点是分母为一个线性函数的平方。这样，每一时间步要求解的是形如(2)的两个方程组，而这两个方程组是具有相同的矩阵。

现在用一个 L_2 模估计来开始我们对于时间离散化的误差分析，也就是分析全离散问题解相对于半离散问题解的误差，和针对初始值仅限于 L_2 的情形。

定理1. 设离散化格式是属于类型Ⅰ′，Ⅱ′或Ⅲ，并假设$V_h=P_0V$，则对半离散问题的时间离散化的误差，有

$$\|U_n-u_h(t_n)\|\leqslant Ck^p t_n^{-p}\|V\|,\quad t_n=nk>0.$$

在给出这个定理的证明之前，我们引进一些记号，对于定义在Δ_h的谱上的任意函数$g(\lambda)$，和$V\in L_2(\Omega)$，令

$$(7)\qquad g(\Delta_h)V=\sum_{j=1}^{N_h}g(-\Lambda_j)(V,\Phi_j)\Phi_j.$$

特别地，若令

$$F_n(\lambda)=r(\lambda)^n-e^{n\lambda},$$

由于$V_h=P_0V$，则可以把误差写成

$$(8)\qquad \begin{aligned}U_n-u_h(t_n)&=r(k\Delta_h)^nP_0V-\exp(nk\Delta_h)P_0V\\&=F_n(k\Delta_h)V.\end{aligned}$$

注意到由(7)式$g(\Delta_h)$在$L_2(\Omega)$上处处有定义，并且$g(\Delta_h)V=g(\Delta_h)P_0V$。例如，对任意$V\in L_2(\Omega)$，有

$$\Delta_hV=(-T_h)^{-1}P_0V,$$

并且由Parseval等式，可以看出$g(\Delta_h)$关于$L_2(\Omega)$的算子模为

$$(9)\qquad \|g(\Delta_h)\|=\max_j|g(-\Lambda_j)|.$$

根据(8)式，定理1是如下引理的一个推论。

引理1. 设离散化格式是Ⅰ′，Ⅱ′或Ⅲ型，则

$$\|F_n(k\Delta_h)\|\leqslant Ck^pt_n^{-p},\qquad t_n=nk>0.$$

证明。 由(9)式，只须证明

$$|F_n(-\lambda)|\leqslant C(k/t_n)^p=Cn^{-p},\quad \lambda=k\Lambda_j,\quad j=1,\cdots,N_h.$$

设λ_0是一个正数，它满足

$$(10)\qquad |r(-\lambda)|\leqslant e^{-c\lambda},\ \text{对于}0<\lambda\leqslant\lambda_0,\ c>0,$$

假设格式有p阶精确度，于是，对于$0<\lambda\leqslant\lambda_0$，有

$$|r(-\lambda)-e^{-\lambda}|\leqslant C\lambda^{P+1},$$

从而有

$$|F_n(-\lambda)|=|(r(-\lambda)-e^{-\lambda})\sum_{j=0}^{n-1}r(-\lambda)^{n-1-j}e^{-j\lambda}|$$

$$\leqslant Cn\lambda^{P+1}e^{-c(n-1)\lambda}\leqslant Cn^{-P}(n\lambda)^{P+1}e^{-cn\lambda}\leqslant Cn^{-P}.$$

由于在Ⅰ′和Ⅱ′型格式的情形，(10)式对于 $\lambda=k\Lambda_j$，$j=1,\cdots,N_h$，和适当选择的λ_0成立，这样就对Ⅰ′型和Ⅱ′型格式证明了引理。对于Ⅲ型格式，还需要考虑λ充分大的情形。比如说，对于$\lambda\geqslant\lambda_0=1$，有

$$e^{-n\lambda}\leqslant e^{-n}\leqslant Cn^{-P}.$$

进一步，由于$|r(\infty)|<1$，故有

$$\sup_{\lambda\geqslant 1}|r(-\lambda)|=e^{-c}，\text{其中}c>0\text{是某常数。}$$

于是，类似地有

$$\sup_{\lambda\geqslant 1}|r(-\lambda)^n|\leqslant e^{-cn}\leqslant Cn^{-P},$$

所以

$$\sup_{\lambda\geqslant 1}|F_n(-\lambda)|\leqslant Cn^{-P}.$$

引理由此得证。

把定理1同前面对于半离散问题的非光滑初始值误差估计（第三章定理3）结合在一起，即得

$$\|u_h(t)-u(t)\|\leqslant Ch^r t^{-r/2}\|V\|,\quad t>0,$$

由此立即可以推出：

定理2. 设离散化格式是Ⅰ′，Ⅱ′或Ⅲ型的，并假设$V_h=P_0V$，则对于全离散解的整体误差，有

$$\|U_n-u(t_n)\|\leqslant C\{h^r t^{-r/2}+k^P t_n^{-P}\}\|V\|,\quad t_n=nk>0,$$

现在来讨论直到$t=0$一致成立的误差估计。这时，为了得到最佳阶估计，必须从初始值就要求有光滑性。为了表示

这种性质，再次引用第三章引进的函数空间 $\dot{H}^s(\Omega)$，它是由 $H^s(\Omega)$ 中在 $\partial\Omega$ 上满足条件 $\Delta^j u=0$，$j<s/2$ 的函数 u 组成的。我们对于半离散问题应用能量法证明了误差估计（第三章定理1）

(11) $\|u_h(t)-u(t)\|\leqslant Ch^r\|V\|_r$，对于 $t\geqslant 0$，$V\in\dot{H}^r(\Omega)$。

为了得到全离散情形的类似的估计，我们将结合(11)式和定理1证明的技巧以及容易证明的等式

$$(12)\qquad V=\sum_{j=0}^{P-1}T_h^j(T-T_h)(-\Delta)^{j+1}V+T_h^P(-\Delta)^P V,$$

对于 $V\in\dot{H}^{2P}(\Omega)$。

同时，需要如下的引理：

引理2. 设离散化格式是Ⅰ′或Ⅱ型，则有

$\|F_n(k\Delta_h)T_h^j\|\leqslant Ck^j$，对于 $0\leqslant j\leqslant P$，$n\geqslant 0$。

证明. 我们有

$$\|F_n(k\Delta_h)T_h^j\|=\max|\Lambda_l^{-j}F_n(-k\Lambda_l)|$$
$$=\max_{\substack{\lambda=k\Lambda_l\\ l=1,\cdots,N_h}}|k^j\lambda^{-j}F_n(-\lambda)|,$$

因此，只需证明

$$|\lambda^{-j}F_n(-\lambda)|\leqslant C,\quad \lambda=k\Lambda_l,\ l=1,\cdots,N_h.$$

象引理1的证明那样，设 λ_0 是一个正数，使得当 $0<\lambda\leqslant\lambda_0$ 时，$|r(-\lambda)|<1$。那么，由格式是 p 阶精度的假设，对于如此的 λ，有

$$|r(-\lambda)-e^{-\lambda}|\leqslant C\lambda^{j+1},\ 对于 0\leqslant j\leqslant p,$$

和

$$|r(-\lambda)|\leqslant e^{-c\lambda},\qquad 0<c<1.$$

因此.

$$|\lambda^{-j}F_n(-\lambda)| = |\lambda^{-j}(r(-\lambda)-e^{-\lambda})\sum_{l=0}^{n-1} r(-\lambda)^{n-1-l}e^{-l\lambda}|$$

$$\leqslant Cn\lambda e^{-c(n-1)\lambda}\leqslant C,$$

这完成对Ⅰ′型格式的证明。当$\lambda<\lambda_0$时，对Ⅱ型格式的$r(\lambda)$，欲证的不等式显然地成立，引理得证。

对于光滑初始值有如下结果：

定理3. 设离散化格式是Ⅰ′或Ⅱ型的，并且假设$V\in\dot{H}^{\max(r,2P)}(\Omega)$和如此选取$V_h$使得

$$\|V_h-V\|\leqslant Ch^r\|V\|_r.$$

则对于全离散格式的误差，有

$$\|U_n-u(t_n)\|\leqslant C\{h^r\|V\|_r+k^P\|V\|_{2P}\},\ \text{对于} t_n=nk\geqslant 0.$$

证明. 首先注意，根据全离散格式的稳定性，不失一般性可以假定$V_h=P_0V$，因为，由我们的假设，

$$\|r(k\Delta_h)^n(V_h-P_0V)\|\leqslant\|V_h-V\|+\|P_0V-V\|$$
$$\leqslant Ch^r\|V\|_r.$$

在假设$V_h=P_0V$下，我们有

$$U_n-u_h(t_n)=F_n(k\Delta_h)V.$$

注意到，如果令$V_k=\sum_{k\lambda_l\leqslant 1}(V,\varphi_l)\varphi_l$,

其中φ_l和λ_l是微分算子$-\Delta$满足零边界值的特征函数和特征值，则对于每一个$s\geqslant 0$，$V_k\in\dot{H}^s(\Omega)$。进一步，由$\dot{H}^s(\Omega)$中模的定义以及它与$H^s(\Omega)$中模$\|\cdot\|_s$的等价性，容易得到

$$\|V-V_k\|\leqslant k^P\|V\|_{\dot{H}^{2P}(\Omega)}\leqslant Ck^P\|V\|_{2P},\tag{13}$$

$$\|V_k\|_{2P}\leqslant C\|V\|_{2P},\tag{14}$$

和

$$\|V_k\|_{r+2j}\leqslant Ck^{-j}\|V\|_r,\ \text{对于} j=0,\cdots,p-1.\tag{15}$$

对V_k应用等式(12)，和为了简单令$F_n = F_n(k\Delta_h)$，则有

$$F_n V_k = \sum_{j=0}^{P-1} F_n T_h^j (T - T_h)(-\Delta)^{j+1} V_k$$
$$+ F_n T_h^P (-\Delta)^P V_k.$$

由引理2和(14)，有

$$\|F_n T_h^P \Delta^P V_k\| \leqslant Ck^P \|\Delta^P V_k\| \leqslant Ck^P \|V_k\|_{2P} \leqslant Ck^P \|V\|_{2P}.$$

再利用(ii)和(15)式，我们得到对$0 \leqslant j \leqslant P-1$，有

$$\|F_n T_h^j (T - T_h)\Delta^{j+1} V_k\| \leq Ck^j \|(T - T_h)\Delta^{j+1} V_k\|$$
$$\leqslant Ck^j h^r \|\Delta^{j+1} V_k\|_{r-2} \leqslant Ck^j h^r \|V_k\|_{r+2j}$$
$$\leqslant Ch^r \|V\|_r.$$

从而有估计式

$$\|F_n V_k\| \leqslant C(h^r \|V\|_r + k^P \|V\|_{2P}).$$

其次，由于稳定性和(13)式，显然有

$$\|F_n (V - V_k)\| \leqslant 2\|V - V_k\| \leqslant Cp\|V\|_{2P},$$

于是可以推出

$$\|U_n - u_h(t_n)\| = \|F_n V\| \leqslant C(h^r \|V\|_r + k^P \|V\|_{2P}).$$

结合半离散问题的误差估计(11)，定理即得证。

直到现在为止，我们一直还没有利用到Ⅳ型格式的性质。为了以后的应用，在结束这一章之前，我们来证明，包括Ⅳ型格式在内的时间离散格式的一个光滑性质，它可以被认为是定义解析半群的光滑性质（参见第三章引理2）的一个离散模似。

引理3. 设离散化格式属于Ⅰ′，Ⅱ′或Ⅳ型，则对每一个$j \geqslant 0$，

$$\|\Delta_h^j r(k\Delta_h)^n\| \leq Ct_n^{-j}，\text{对于} t_n = nk \geqslant jk.$$

证明 由(9)式则有

$$\|\Delta_h^j r(k\Delta_h)^n\| = \max_l |\Lambda_l^j r(-k\Lambda_l)^n|.$$

首先考虑类型Ⅰ′和Ⅱ′的格式，由上面的讨论已知，在这些情形下，

$$|r(-k\Lambda_l)| \leqslant e^{-ck\Lambda_l},\ 对于 l=1,\cdots,N_h, c>0 某常数，$$

于是

$$|\Lambda_l^j r(-k\Lambda_l)^n| \leqslant \Lambda_l^j e^{-cnk\Lambda_l} \leqslant C(nk)^{-j},$$

由此证明了引理的估计式。

对于类型Ⅳ的有理函数，我们下边将证明，对于充分小的$c>0$，有

$$(16) \qquad |r(-\lambda)| \leqslant \frac{1}{1+c\lambda},\ \lambda \geqslant 0.$$

假设这个不等式成立，则有

$$\|\triangle_h^j r(k\triangle_h)^n\| \leqslant k^{-j} \operatorname{Sup}_{\lambda>0} |\lambda^j r(-\lambda)^n| \leqslant k^{-j} \operatorname{Sup}_{\lambda>0} \frac{\lambda^j}{(1+c\lambda)^n}.$$

对于$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，显然有

$$\frac{\lambda^j}{(1+c\lambda)^n} \leqslant \lambda^j e^{-c_1 n\lambda} \leqslant Cn^{-j},$$

而对于$\lambda \geqslant 1$和$n \geqslant j$，则有

$$\frac{\lambda^j}{(1+c\lambda)^n} \leqslant \left(\frac{\lambda}{1+c\lambda}\right)^j \cdot \frac{1}{(1+c\lambda)^{n-j}} \leqslant Cn^{-j}.$$

综合这些不等式，引理即得证。

剩下的是证明(16)式成立。对于充分小的λ，有

$$r(-\lambda) = e^{-\lambda} + O(\lambda^2) = 1-\lambda+O(\lambda^2),\ 当 \lambda \to 0 时，$$

由此可以推出，对于充分小的c和某一$\lambda_0>0$，

$$(1+c\lambda)|r(-\lambda)| \leqslant 1,\ 对于 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0.$$

另一方面，由于$r(\infty)=0$，所以$r(\lambda)$的分子次数比分母的次

数要小。因此，对于充分小的$c>0$，

$$\lim_{\lambda\to\infty}|(1+c\lambda)r(-\lambda)|<1,$$

于是对于某一$\lambda_1>0$，有

$$(1+c\lambda)|r(-\lambda)|<1,\quad 对于\lambda>\lambda_1.$$

最后，由于对$\lambda>0$，$|r(-\lambda)|<1$，所以我们可以选取$c>0$充分小，使得

$$(1+c\lambda)|r(-\lambda)|<1,\quad 当\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1时.$$

这就证明了(16)式。

参 考 文 献

这一章的内容是基于〔1〕。涉及到多步法，非自共轭椭圆算子和算子依赖于时间的有关工作，参看〔2〕,〔3〕,〔4〕,〔5〕,〔6〕及其所引的文献。

1. G. A. Baker, J. H. Bramble and V. Thomée, Single step Galerkin approximations for parabolic problems, Math. Comput. 31, 818—847(1977).

2. M. Zlămal, Finite element multistep discretizations of parabolic boundary value problems, Math. Comput. 29, 350—359(1975).

3. M. -N. Le Roux, Semidiscretization in time for parabolic problems, Math. Comput, 33, 919—931 (1979).

4. M. -N. Le Roux, Semi-discretization en temps pour les équations d'évolution paraboliques lorsque l'opérateur dépend du temps, RAIRO, Anal. Numér. 13, 119—137(1979).

5. P. Sammon, Fully discrete approximation methods for parabolic problems with nonsmooth initial data, SIAM J. Numer. Anal. 20, 437—470(1983).

6. J. H. Bramble and P. H. Sammon, Efficient higher order single step methods for parabolic problems: Part I. Math. Comput. 35, 655—677(1980).

第八章　对于非齐次方程的全离散格式

在这一章里，我们将继续研究全离散方法，并且就非齐次热传导方程来讨论全离散格式。根据第七章的讨论，这里我们只限于讨论初始值为0的情形，并且考虑关于R^d中具有光滑边界$\partial\Omega$的有界域Ω上的初边值问题

$$(1)\qquad u_t-\Delta u=f,\qquad 于\Omega\times[0,\infty)内,$$
$$u=0,\qquad 在\partial\Omega\times[0,\infty)上,$$
$$u(\cdot,0)=0,\quad 于\Omega内。$$

象在第七章里那样，我们假设给定了一有限维空间族$\{S_h\}$和一相应的满足性质(i)和(ii)的算子族$\{T_h\}$，并且在S_h上，令$\Delta_h=-T_h^{-1}$。为了推广齐次方程的结果，我们考虑如下形式的格式

$$(2)U_{n+1}=r(k\Delta_h)U_n+k\sum_{i=1}^{m}q_i(k\Delta_h)P_0f(t_n+\tau_ik),$$
$$n=0,1,\cdots,$$
$$U_0=0,$$

其中，k是时间步长，$t_n=nk$，$r(\lambda)$和$\{q_i(\lambda)\}_1^m$是在$k\Delta_h$的特征值上为有界的有理函数，并且关于k和h是一致有界的，$\{\tau_i\}_1^m$是互不相同的实数，为了简单起见，设它们在$[0,1]$内。

我们可以认为(2)是(1)的半离散问题

$$(3)\qquad u_{h,t}-\Delta_hu_h=f_h=P_0f,\quad t\geqslant 0,$$

$$u_h(0)=0,$$

对时间的离散化格式。作为开始我们来讨论这个离散化的精确度。为此，我们考虑一个简单的常微分方程式问题

$$(4)\qquad u'-au=f,\quad t\geqslant 0,\quad a\in R,$$

$$u(0)=0。$$

相应的离散格式定义为

$$(5)\qquad U_{n+1}=r(ka)U_n+k\sum_{i=1}^{m}q_i(ak)f(t_n+\tau_i k)。$$

我们说形如(2)的时间离散化格式是p阶精确的，如果对于任意的a和f，问题(4)的解满足(5)具有误差$O(k^{p+1})$，当$k\to 0$时。我们有如下的结果：

引理1．形如(2)的时间离散化格式是p阶精确的充分必要条件是

$$(\mathrm{i})\qquad r(\lambda)=e^{\lambda}+O(\lambda^{p+1}),\ 当\lambda\to 0时,$$

和对于$0\leqslant l\leqslant p$,

$$(\mathrm{ii})\quad \sum_{i=1}^{m}\tau_i^l q_i(\lambda)=\frac{l!}{\lambda^{l+1}}\left(e^{\lambda}-\sum_{j=0}^{l}\frac{\lambda^j}{j!}\right)+O(\lambda^{p-l}),$$

当$\lambda\to 0$时，

或者等价地，

$$(\mathrm{ii})'\quad \sum_{i=1}^{m}\tau_i^l q_i(\lambda)=\int_0^1 s^l e^{\lambda(1-s)}ds+O(\lambda^{p-l}),\ 当\lambda\to 0时.$$

证明．我们先来证明条件(i)和(ii)，(ii)′的必要性．对于(4)的精确解，有

$$u(t_{n+1})=e^{ak}u(t_n)+k\int_0^1 e^{ak(1-s)}f(t_n+sk)ds。$$

取$f=0$，对于一个p阶精确的格式，则有

$$u(t_{n+1})=e^{ak}u(t_n)=r(ak)u(t_n)+O(k^{p+1}),\text{ 当}k\to 0\text{时},$$

或者，对于每一个a，

$$r(ak)=e^{ak}+O(k^{p+1}),\quad \text{当}k\to 0\text{时},$$

这就证明了条件(i)。

条件(ii)和(ii)′的必要性，可由下式推出，

$$\int_0^1 e^{ak(1-s)}f(t_n+sk)ds=\sum_{i=1}^m q_i(ak)f(t_n+\tau_i k)+O(k^p),$$

$$\text{当}k\to 0\text{时}。$$

将f在t_n附近展成Taylor级数，由于$f^{(l)}(t_n)$，$l=0,\cdots,p$，是任意的，可知

$$\int_0^1 s^l e^{ak(1-s)}ds=\sum_{i=1}^m \tau_i^l q_i(ak)+O(k^{p-l}),\quad \text{当}k\to 0\text{时},$$

于是证明了条件(ii)′。简单的计算表明

$$\frac{1}{l!}\int_0^1 s^l e^{\lambda(1-s)}ds=\frac{1}{\lambda^{l+1}}\sum_{j=l+1}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!},$$

可见(ii)和(ii)′是等价的。

把上面的论证反转一下即可证明条件的充分性。

从计算角度看，有理函数$q_i(\lambda)$的分母选成为$r(\lambda)$的分母是合适的。假如这样的话，则有

$$r\left(-\frac{1}{\mu}\right)=\frac{n(\mu)}{d(\mu)},$$

$$q_i\left(-\frac{1}{\mu}\right)=\frac{n_i(\mu)}{d(\mu)},\quad i=1,\cdots,m,$$

其中n，n_i，d为多项式。那么，格式(2)可以写成简单的形式

$$d(k^{-1}T_h)U_{n+1} = n(k^{-1}T_h)U_n +$$

$$k\sum_{i=1}^{m} n_i(k^{-1}T_h)f_h(t_n+\tau_i k).$$

达到这个目的的一个方法是，除了满足引理1的条件以外，首先选取$r(\lambda)$，使得条件(i)成立，然后在[0,1]上选取互异的实数$\{\tau_i\}_1^m$，$m=p$，最后解关于$\{q_i(\lambda)\}_1^p$的方程组

$$(6)\sum_{i=1}^{p}\tau_i^l q_i(\lambda)=\frac{l!}{\lambda^{l+1}}\Big(r(\lambda)-\sum_{j=0}^{l}\frac{\lambda^j}{j!}\Big),\ l=0,\cdots,p-1.$$

由于(6)式左边的系数矩阵是Vandermonde型的矩阵，所以是非奇异的。由(6)所求得的有理函数$q_i(\lambda)$是(6)的右端项的线性组合.特别地，(6)的右端项仅有的奇异点是$r(\lambda)$的那些奇异点，因此$q_i(\lambda)$的奇异点也是$r(\lambda)$的奇异点，这样，$q_i(\lambda)$与$r(\lambda)$具有相同的分母。如果$r(\lambda)$对于充分大的λ是有界的，则(6)的右端当λ足够大时充分小，从而$q_i(\lambda)$的分子的次数要比分母的次数低。注意，条件(i)和方程组(6)一起隐含着(ii)成立。对于$0\leqslant l\leqslant p-1$，这个事实是明显的；对于$l=p$，条件(ii)归之于

$$(7)\sum_{i=1}^{m}\tau_i^p q_i(\lambda)=\frac{p!}{\lambda^{p+1}}\sum_{j=p+1}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}+O(1)=O(1),\text{当}\lambda\to 0\text{时}.$$

因为，由条件(i)，方程组(6)的每个右端项对充分小的λ有界，所以$q_i(\lambda)$亦然，故(7)式得证。

对于某些格式，求积节点的数目m是可以比p小的。Crank-Nicolson格式

$$(I-\frac{1}{2}k\Delta_h)U_{n+1}=(I+\frac{1}{2}k\Delta_h)U_n+kf_h(t_n+\frac{1}{2}k),$$

就是一例。对于这个格式，

$$p=2,\quad m=1,\quad \tau_1=\frac{1}{2},\quad r(\lambda)=\frac{1+\frac{1}{2}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda},\ q_1(\lambda)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\lambda}.$$

而关系式(i)和(ii)则分别地归于

$$\frac{1+\frac{1}{2}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda}=e^{\lambda}+O(\lambda^3),$$

和

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}\lambda}=\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda}-1)+O(\lambda^2),$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\lambda}=\frac{1}{\lambda^2}(e^{\lambda}-1-\lambda)+O(\lambda),$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\lambda}=\frac{1}{\lambda^3}(e^{\lambda}-1-\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2)+O(1),$$

对充分小的λ。

在这一章的后一部分，我们将讨论离散化格式的选择问题。

现在我们打算对于非齐次热传导方程的全离散方法(2)的误差进行分析，这个方法可写成为

(8) $$U_{n+1}=E_{kh}U_n+k\theta_{kh}f_h(t_n),\quad n=0,1,\cdots,$$
$$U_0=0$$

此处我们已经设

$$E_{kh}V=r(k\Delta_h)V,$$

以及

$$Q_{kh} f_h = \sum_{i=1}^{m} q_i(k\Delta_h) f_h(t + \tau_i k)。$$

其中$f_h = P_0 f$。有时我们要假设E_{kh}在L_2中是稳定的，这里是指$|r(\lambda)| \leqslant 1$在$k\Delta_h$的谱上成立；我们前边定义的 I′型和Ⅱ型格式的所有算子E_{kh}（或者说相应齐次方程的离散化格式）都满足这个条件。

我们首先要证明，如果格式（2）是p阶精确的，和初始值满足一定的假设条件，则半离散问题（3）的时间离散化误差是$O(h^r + k^p)$。这与前边对半离散解的误差估计结合起来，就可以推出关于格式(2)的具有同样阶的全离散误差估计。我们将再次借用在第三章里引进的函数空间$\dot{H}^s(\Omega)$，已经知道，对于满足适当边界条件的函数，当$s \geqslant 0$时，$\dot{H}^s(\Omega)$的模等价于$H^s(\Omega)$的模$\|\cdot\|_s$。在下边有的地方，$\|\cdot\|_s$中的s可能出现负值，那时解释成相对于空间$\dot{H}^s(\Omega)$的模（参见第六章引理1）。我们以后将经常使用记号$f^{(l)}$，它表示$\partial^l f/\partial t^l$。

定理1. 假设时间离散化格式（2）是p阶精确的，并且E_{kh}属于类型 I′或Ⅱ。设U_n和u_h分别是(2)和(3)的解，如果对于$l<p$，$t \geqslant 0$，有$f^{(l)}_{(t)} \in \dot{H}^{\max(r,2p)-2l}(\Omega)$，则对于$t_n = nk > 0$，有

$$(9)\ \|U_n - u_h(t_n)\| \leqslant Ch^r t_n \sum_{l=0}^{p-1} \operatorname{Sup}\|f^{(l)}(s)\|_{r-2l}$$

$$+ Ck^p\{t_n \sum_{l=0}^{p-1} \operatorname{Sup}\|f^{(l)}(s)\|_{2p-2l} + \int_0^{t_n} \|f^{(p)}\| ds\}。$$

证明. 由(8)式立即可得

$$U_n = k\sum_{j=0}^{n-1} E_{kh}^{n-1-j} Q_{kh} f_h(t_j)。$$

再引进半离散齐次方程

$$u_{h,t}=\Delta_h u_h,\quad t\geqslant 0,$$

$$u_h(0)=V_h,$$

的解算子$E_h(t)=\exp(t\Delta_h)$，对于(3)的解，有表示式

$$u_h(t_n)=\int_0^{t_n}E_h(t_n-s)f_h(s)ds=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}E_h(t_n-s)f_h(s)ds$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}E_h(t_{n-1-j})\int_{t_j}^{t_{j+1}}E_h(t_{j+1}-s)f_h(s)ds$$

$$=k\sum_{j=0}^{n-1}E_h(t_{n-1-j})I_{kh}f^h(t_j),$$

其中

$$I_{kh}g(t)=\int_0^1 E_h((1-s)k)g(t+sk)ds.$$

用这个记号，误差$e_n=U_n-u_h(t_n)$可以表示为

$$e_n=k\sum_{j=0}^{n-1}\{E_h^{n-1-j}Q_{kh}f_h(t_j)-E_h(t_{n-1-j})I_{kh}f_h(t_j)\}$$

$$=e_{n,1}+e_{n,2},$$

其中

$$(10)\quad e_{n,1}=k\sum_{j=0}^{n-1}(E_{kh}^{n-1-j}-E_h(t_{n-1-j}))I_{kh}f_h(t_j).$$

和

$$(11)\qquad e_{n,2}=k\sum_{j=0}^{n-1}E_{kh}^{n-1-j}(Q_{kh}-I_{kh})f_h(t_j).$$

由第七章定理3知道，对于Ⅰ′和Ⅱ型格式，如果$V\in\mathring{H}^{\max(r,2P)}(\Omega)$，则有

$$\|E_{kh}^{n}P_0V-E_k(t_n)P_0V\|\le C(h^r\|V\|_r+k^p\|V\|_{2p}).$$

再注意到I_{kh}与$E_{kh}^{n}-E_k(t_n)$的可交换性，以及

$$\|I_{kh}g(t)\|\le\int_0^1\|E_h((1-s)k)g(t+sk)\|ds\le\int_0^1\|g(t+sk)\|ds.$$

那么，对于误差中的第一项，有

$$\|e_{n,1}\|\le k\sum_{j=0}^{n-1}\|I_{kh}(E_{kh}^{n-1-j}-E_h(t_{n-1-j}))f_h(t_j)\|$$

$$\le k\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1\|(E_{kh}^{n-1-j}-E_h(t_{n-1-j}))P_0f(t_j+sk)\|ds$$

$$\le Ck\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1(h^r\|f(t_j+sk)\|_r+k^p\|f(t_j+sk)\|_{2p})ds$$

$$=C\{h^r\int_0^{t_n}\|f\|_r ds+k^p\int_0^{t_n}\|f\|_{2p}ds\},$$

这是以(9)式的右端为界的。

为了估计误差中的第二项，我们令

$$I_{kh}f_h(t_j)=\int_0^1E_h((1-s)k)f_h(t_j+sk)ds$$

$$=\sum_{l=0}^{p-1}\frac{k^l}{l!}\int_0^1E_h((1-s)k)s^l ds f_h^{(l)}(t_j)+R_{p,1}f_h(t_j),$$

和

$$Q_{kh}f_h(t_j)=\sum_{i=1}^{m}q_i(k\Delta_h)f_h(t_j+\tau_ik)$$

$$=\sum_{l=0}^{p-1}\frac{k^l}{l!}(\sum_{i=1}^{m}\tau_i^lq_i(k\Delta_h))f_h^{(l)}(t_j)+R_{p,2}f_h(t_j),$$

其中

$$R_{P,1} f_h(t_j)$$

$$= \int_0^1 E_h((1-s)k)\left(\int_{t_j}^{t_j+sk} \frac{(t_j+sk-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} f_h^{(P)}(\tau)d\tau\right)ds$$

和

$$R_{P,2} f_h(t_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} q_i(k\Delta_h)\int_{t_j}^{t_j+\tau_i k} \frac{(t_j+\tau_i k-s)^{P-1}}{(p-1)!} f_h^{(P)}(s)ds.$$

我们立即有

$$\|R_{P,1} f_h(t_j)\| + \|R_{P,2} f_h(t_j)\| \leq Ck^{P-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|f_h^{(P)}(s)\|ds$$

$$\leq Ck^{P-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|f^{(P)}\|ds .$$

这样，我们推出

$$(12)\quad (Q_{kh} - I_{kh})f_h(t_j) = \sum_{l=0}^{P-1}\frac{k^l}{l!}b_l(k\Delta_h)f_h^{(l)}(t_j) + R_P f_h(t_j),$$

其中

$$b_l(\lambda) = \sum_{i=1}^{m}\tau_i^l q_i(\lambda) - \int_0^1 s^l e^{(1-s)\lambda}ds,$$

并且，

$$(13)\qquad \|R_P f_h(t_j)\| \leq Ck^{P-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|f^{(P)}\|ds.$$

为了处理包含$b_l(k\Delta_h)$的项，需要如下的结果：

引理2. 设$b(\lambda)$关于$k\Delta_h$特征值为有界，并且关于k和h是

一致的，又对于$l\leq p$有

$$b(\lambda)=O(\lambda^{p-l}),\ \text{当}\lambda\to 0\text{时。}$$

则对于$V\in \dot{H}^{\max(r,2P)-2l}(\Omega)$，有

$$\|k^l b(k\Delta_h)P_0V\|\leqq Ch^r\|V\|_{r-2l}+Ck^P\|V\|_{2P-2l}.$$

假设这个引理已被证明，由引理1，对于（12）式中的项，我们有

$$\|k^l b_l(k\Delta_h)P_0 f^{(l)}(t_j)\|\leq Ch^r\|f^{(l)}(t_j)\|_{r-2l}$$
$$+Ck^P\|f^{(l)}(t_j)\|_{2P-2l}.$$

因此，由(12)和(13)式，

$$\|(Q_{kh}-I_{kh})f_h(t_j)\|\leq Ch^r\sum_{l=0}^{P-1}\|f^{(l)}(t_j)\|_{r-2l}$$

$$+Ck^P\sum_{l=0}^{P-1}\|f^{(l)}(t_j)\|_{2P-2l}+Ck^{P-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\|f^{(P)}\|ds,$$

于是

$$\|e_{n,2}\|\leq Ck\sum_{j=0}^{n-1}\|(Q_{kh}-I_{kh})f_h(t_j)\|$$

$$\leq Ch^r t_n\sum_{l=0}^{P-1}\operatorname{Sup}_{s<t_n}\|f^{(l)}(s)\|_{r-2l}$$

$$+Ck^P\{t_n\sum_{l=0}^{P-1}\operatorname{Sup}_{s<t_n}\|f^{(l)}(s)\|_{2P-2l}+\int_0^{t_n}\|f^{(P)}\|ds\}.$$

至此，除引理2以外，定理得证。

引理2的证明。设$\{\varphi_j\}_1^\infty$和$\{\lambda_j\}_1^\infty$是$-\Delta$的特征函数和特征值，并且令

$$V_k=\sum_{k\lambda_j<1}(V,\varphi_j)\varphi_j,$$

于是（参见第七章定理3的证明）有

$$\|V-V_k\|\leqq Ck^{p-l}\|V\|_{2p-2l},$$

$$\|V_k\|_{2p-2l}\leqq C\|V\|_{2p-2l},$$

和

$$\|V_k\|_{r+2q}\leqq Ck^{-q-l}\|V\|_{r-2l}, \quad 对于 0\leqq q\leqq p-l-1.$$

由第七章的等式(12)，我们有

$$V_k=\sum_{q=0}^{p-l-1}T_h^q(T-T_h)(-\Delta)^{q+1}V_k+T_h^{p-l}(-\Delta)^{p-l}V_k.$$

现在令$B_{kh}=k^lb(k\Delta_h)P_0:L_2(\Omega)\to S_h$和$\sigma_{kh}$为$k\Delta_h$的谱，则对于$0\leqq q\leqq p-l$，有

$$\|B_{kh}T_h^qV\|=k^l\|b(k\Delta_h)(-\Delta_h)^{-q}P_0V\|$$

$$\leq k^{q+l}\operatorname{Sup}_{\lambda\in\sigma_{kh}}\left|\frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\right|\|V\|\leqq Ck^{q+l}\|V\|.$$

由此，特别地，

$$\|B_{kh}T_h^{p-l}\Delta^{p-l}V_k\|\leq Ck^p\|\Delta^{p-l}V_k\|\leq Ck^p\|V\|_{2p-2l},$$

和对于$0\leq q\leq p-l-1$，

$$\|B_{kh}T_h^q(T-T_h)\Delta^{q+1}V_k\|\leq Ck^{q+l}\|(T-T_h)\Delta^{q+1}V_k\|$$

$$\leq Ck^{q+l}h^r\|\Delta^{q+1}V_k\|_{r-2}\leq Ch^rk^{q+l}\|V_k\|_{r+2q}$$

$$\leq Ch^r\|V\|_{r-2l}.$$

最后有

$$\|B_{kh}(V-V_k)\|\leq Ck^l\|V-V_k\|\leq Ck^p\|V\|_{2p-2l}.$$

综合这些估计式，证明了引理2。

我们注意到，在上面的分析中，为了得最佳收敛阶，要求当$t\geqslant0$时$f^{(l)}(t)$属于$\dot H^{2p-2l}(\Omega)$。特别地，这意味着对f除了光滑性的要求之外，还要求对于$t\geqslant0$，f和它的时间导数在$\partial\Omega$上满足一定的边界条件。这不是令人满意的。因为，除去$t=0$之外，对于保证(1)的精确解的存在性和光滑性来

说，如此之边界条件并不是必要的。我们试图减少这些假设条件，首先注意，如果Ⅰ′，Ⅱ′和Ⅳ型格式的算子 $E_{kh}=r(k\Delta_h)$具有更强的光滑性质（参见第七章引理3），则上面的正则性要求，除了在那里寻求误差估计的 t 点前边小区间以外，可以被大大的减弱。

定理2. 假设时间离散化格式（2）是 p 阶精确的，并且 $E_{kh}=r(k\Delta_h)$属于类型Ⅰ′，Ⅱ′或Ⅳ。设U_n和 u_h分别是(2)和(3)的解，和 $0<\delta<t^*$，那么，存在常数 c，使得当 $\delta\leqslant t_n=nk\leq t^*$和对于 $t_n-\delta\leq t\leq t_n$与 $l<p$，$f^{(l)}(t)\in\dot{H}^{\max(r,2p)-2l}(\Omega)$时，则有

$$(14)\|U_n-u_h(t_n)\|\leq Ch^r\sum_{l=0}^{p-1}\sup_{t_n-\delta<s<t_n}\|f^{(l)}(s)\|_{r-2l}$$

$$+Ck^p\{\sum_{l=0}^{p-1}(\|f^{(l)}(0)\|+\sup_{t_n-\delta<s<t_n}\|f^{(l)}(s)\|_{2p-2l})$$

$$+\int_0^{t_n}\|f^{(p)}\|ds\}.$$

证明. 为了估计$e_n=U_n-u_h(t_n)$，我们选取$\varphi\in C^\infty(R)$。使得当$t\geqslant-\delta/2$时，$\varphi(t)=1$，而当 $t\leq-\delta$时，$\varphi(t)=0$，对于我们要估计误差的点t_n，令

$f(t)=f(t)\varphi(t-t_n)+f(t)(1-\varphi(t-t_n))=f_1(t)+f_2(t)$，

于是，对于$t\leqslant t_n-\delta$，$f_1(t)=0$，而当$t\geqslant t_n-\delta/2$ 时，$f_2(t)=0$。则(2)和(3)的解可由相应于 f_1和 f_2的解通过线性迭加得到。由定理1，误差中来自f_1的那部分可由(9)式的右端控制，其中的$f(t)$用$f(t)\varphi(t-t_n)$代替，可见这部分误差是以(14)式的右端为界的。

为了估计来自f_2的那部分误差，只须证明，若 U_n 和u_h

分别是f在$t \geqslant t_n - \delta/2$上取0值时(2)和(3)的解，则有

$$\|U_n - u_h(t_n)\| \leqslant Ck^P\{\sum_{l=0}^{P-1}\|f^{(l)}(0\ )\| + \int_0^{t_n}\|f^{(P)}\|ds\},$$

对于$\delta \leqslant t_n \leqslant t^*$。

为此，象在定理1的证明中那样，考虑表达式

$$U_n - u_h(t_n) = e_n = e_{n,1} + e_{n,2},$$

其中$e_{n,1}$和$e_{n,2}$分别由(10)和(11)定义。由第七章的定理 1 知道

$$\|E_{kh}^n P_0 V - E_h(t_n)P_0 V\| \leqslant Ck^P(nk)^{-P}\|V\|.$$

由于对$e_{n,1}$的所有非零项，$(n-1-j)k \geqslant c\delta > 0$，所以，用上面对$e_{n,1}$的估计得到

$$\|e_{n,1}\| \leqslant Ck\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1 k^P\|f(t_j + sk)\|ds \leqslant Ck^P\int_0^{t_n}\|f\|ds.$$

现在来考虑$e_{n,2}$，用上面的记号，有

$$\begin{aligned}\|e_{n,2}\| &\leqslant k\sum_{j=0}^{n-1}\|E_{kh}^{n-1-j}(Q_{kh} - I_{kh})f_h(t_j)\|\\ &\leqslant Ck\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{P-1}k^l\|E_{kh}^{n-1-j}b_l(k\Delta_h)f_h^{(l)}(t_j)\|\\ &\quad + Ck\sum_{j=0}^{n-1}\|R_P f_h(t_j)\|.\end{aligned}$$

同样地对于$(n-1-j)k \geqslant c\delta > 0$，利用第七章的引理 3，则对于任意$q$，有

$$\|E_{kh}^{n-1-j}V\| = \|E_{kh}^{n-1-j}\Delta_h^q T_h^q V\| \leqslant C\delta^{-q}\|T_h^q V\|.$$

由于，对充分小的λ，$b_l(\lambda) = O(\lambda^{P-l})$，因此有

$$k^l\|E_{kh}^{n-1-j}b_l(k\Delta_h)V\| \leqslant Ck^l\|T_h^{P-l}b_l(k\Delta_h\ )V\| \leqslant Ck^P\|V\|,$$

于是，再利用上面对$R_P f_h(t_j)$的估计(13)，由于$t_n \leqslant t^*$，则

$$\|e_{n,2}\| \leqslant Ck\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{P-1}k^P\|f_h^{(l)}(t_j)\| + Ck^P\int_0^{t_n}\|f^{(P)}\|ds$$

$$\leqslant Ck^P\{\sum_{l=0}^{P-1}\operatorname{Sup}_{s<t_n}\|f^{(l)}(s)\| + \int_0^{t_n}\|f^{(P)}\|ds\}$$

$$\leqslant Ck^P\{\sum_{l=0}^{n-1}\|f^{(l)}(0)\| + \int_0^{t_n}\|f^{(P)}\|ds\}。$$

定理得证。

现在，我们想通过对误差的更细致的分析，以及对时间离散化格式(2)提出附加条件，来进一步减少$t\geqslant 0$时$f^{(l)}(t)$在边界上性质的假设。

首先稍微改变一下精确度条件的叙述。令

$$r_l(\lambda) = \frac{l!}{\lambda^{l+1}}(r(\lambda) - \sum_{j=0}^{l}\frac{\lambda^j}{j!}) - \sum_{i=1}^{m}\tau_i^l q_i(\lambda), l = 0, \cdots, p-1,$$

和

$$r_P(\lambda) = \frac{p!}{\lambda^{P+1}}(r(\lambda) - \sum_{j=0}^{P}\frac{\lambda^j}{j!})。$$

利用这个记号，由引理1容易得到，格式(2)是P阶精确的充分必要条件是

$r_l(\lambda) = O(\lambda^{P-l})$，当$\lambda\to 0$时，$l = 0, \cdots, p$。

我们说时间离散化格式(2)是严格的p_0阶精确的，$p_0\leqslant p$，如果

$r_l(\lambda) = 0$，对于$l = 0, \cdots, p_0 - 1$。

上面在构造p阶特殊格式中所用到的条件(6)，用这里的说法表示，即这些格式是严格p阶精确的。

在下一个结果中，我们将对p阶严格精确的格式，给出一个误差估计，此时对于$t>0$设有附设人为的边界条件。现

在，在误差估计的表达式中我们宁可用解而不用初始值。同时注意，根据解u在$\partial\Omega$上的边界条件，假设u和它关于时间的导数在$\partial\Omega$上取值为0是适当的，所以，这些函数可以取作是属于$\dot{H}^s(\Omega)$的，其中$s=1$和2，但是s不能大于2。在分析中，我们是把全离散格式的解和精确解的椭圆投影作比较，而不是和半离散解u_h作比较。

定理3. 假设格式(2)是p阶精确和严格p阶精确的，并且$E_{kh}=r(k\Delta_h)$在L_2中是稳定的。设U_n和u分别是(2)和(1)的解，那么，在适当的正则性假设下，对于$t_n=nk>0$，有

$$\|U_n-u(t_n)\|\leqslant Ch^r t_n \operatorname*{Sup}_{s\leqslant t_n}\|u_t(s)\|_r+Ck^P\{t_n\|u^{(P)}(0)\|_2$$

$$+(1+t_n)\int_0^{t_n}\|u^{(P+1)}(s)\|_2 ds\}.$$

证明. 利用椭圆投影$P_1u=-T_h\Delta u$，令

$$U_n-u(t_n)=(U_n-P_1u(t_n))+(P_1u(t_n)-u(t_n))=\theta_n+\rho_n.$$

由于$u(0)=0$，象通常那样，那么有

$$\|\rho_n\|\leqslant Ch^r\|u(t_n)\|_r\leqslant Ch^r t_n \operatorname*{Sup}_{s\leqslant t_n}\|u_t(s)\|_r,$$

并只剩下考虑θ_n了。我们注意$(P_1u)(t)=\tilde{u}_h(t)$满足半离散方程

$$\tilde{u}_{h,t}-\Delta_h\tilde{u}_h=P_1u_t-\Delta_hP_1u=P_1u_t-P_0\Delta u$$

$$=P_0f+P_0(P_1-I)u_t=\tilde{f}_h(t),$$

和引进相应的全离散格式

$$\tilde{U}_{n+1}=E_{kh}\tilde{U}_n+k(Q_{kh}\tilde{f}_h)(t_n),$$

$$\tilde{U}_0=0,$$

的解$\tilde{U}_n$。那么，θ_n可以表示成

$$\theta_n=(U_n-\tilde{U}_n)+(\tilde{U}_n-\tilde{u}_h(t_n))=Z_n+W_n,$$

这里的Z_n满足

$$Z_{n+1}=E_{kh}Z_n+kQ_{kh}P_0(I-P_1)u_t,$$

$$Z_0=0.$$

由E_{kh}的稳定性和Q_{kh}的有界性，我们有

$$\|Z_n\|\leqslant k\sum_{j=0}^{n-1}\|Q_{kh}P_0(I-P_1)u_t(t_j)\|$$

$$\leqslant Ct_n\sup_{s<t_n}\|(P_1-I)u_t(s)\|$$

$$\leqslant Ch^r t_n\sup_{s<t_n}\|u_t(s)\|_r.$$

证明的主要部分现在是对W_n的估计。W_n满足

$$W_{n+1}=E_{kh}W_n+\varphi_n \tag{15}$$

$$W_0=0,$$

其中

$$\varphi_n=-\tilde{u}_h(t_{n+1})+E_{kh}\tilde{u}_h(t_n)+kQ_{kh}\tilde{f}_h(t_n)$$

$$=-\tilde{u}_h(t_{n+1})+r(k\Delta_h)\tilde{u}_h(t_n)$$

$$+k\sum_{i=1}^{m}q_i(k\Delta_h)(\tilde{u}_h^{(1)}-\Delta_h\tilde{u}_h)(t_n+\tau_i k).$$

将φ_n关于k展开成Taylor级数

$$\varphi_n=-\sum_{l=0}^{P}\frac{k^l}{l!}\tilde{u}_h^{(l)}(t_n)+r(k\Delta_h)\tilde{u}_h(t_n)$$

$$+k\sum_{i=1}^{m}q_i(k\Delta_h)\sum_{l=0}^{P-1}\frac{(\tau_i k)^l}{l!}(\tilde{u}^{(l+1)}-\Delta_h\tilde{u}_h^{(l)})(t_n)$$

$$-\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{(t_{n+1}-s)^P}{P!}\tilde{u}^{(P+1)}(s)ds$$

$$+k\sum_{i=1}^{m}q_i(k\Delta_h)\int_{t_n}^{t_n+\tau_i k}\frac{(t_n+\tau_i k-s)^{P-1}}{(p-1)!}\tilde{u}_h^{(P+1)}(s)ds$$

$$-k\sum_{i=1}^{m}q_i(k\Delta_h)\int_{t_n}^{t_n+\tau_i k}\frac{(t_n+\tau_i k-s)^{p-1}}{(p-1)!}\Delta_h\tilde{u}_h^{(p)}(s)ds$$

$$=-\sum_{l=0}^{t}\frac{k^l}{l!}h_l(k\Delta_h)\tilde{u}_h^{(l)}(t_n)+R_{n,1}+R_{n,2}+R_{n,3},$$

这里已经令

$$h_0(\lambda)=1-r(\lambda)+\lambda\sum_{i=0}^{m}q_i(\lambda),$$

$$h_l(\lambda)=1-l\sum_{i=1}^{m}\tau_i^{l-1}q_i(\lambda)+\lambda\sum_{i=1}^{m}\tau_i^l q_i(\lambda),\text{对于}1\leqslant l\leqslant p-1,$$

和

$$h_p(\lambda)=1-p\sum_{i=1}^{m}\tau_i^{p-1}q_i(\lambda)。$$

由于$P_1=-T_h\Delta$是由$\dot{H}^2(\Omega)$到L_2的有界映射，所以立即有

$$\|R_{n,1}\|+\|R_{n,2}\|\leqslant Ck^p\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|P_1u^{(p+1)}\|ds$$

$$\leqslant Ck^p\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u^{(p+1)}\|_2 ds。$$

并且，由于$\Delta_h P_1=P_0\Delta$，故又有

$$\|R_{n,3}\|\leqslant Ck^p\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|P_0\Delta u^{(p)}\|ds\leqslant Ck^p\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u^{(p)}\|_2 ds。$$

由简单计算得($r_{-1}=0$)

$$h_l(\lambda)=lr_{l-1}(\lambda)-\lambda r_l(\lambda),\quad l=0,\cdots,p,$$

又由于格式是p阶严格精确的，这样对于$l<p$，有$h_l(k\Delta_h)=0$。在φ_n的Taylor展开式中，只剩下估计$l=p$的项。我们有

$$k^P h_P(k\Delta_h)\tilde{\tilde{u}}_h^{(P)} = -k^{P+1} r_P(k\Delta_h)\Delta_h P_1 u^{(n)}$$
$$= -k^{n+1} r_P(k\Delta_h) P_0 \Delta u^{(P)},$$

由于$r_P(k\Delta_h)$是有界的，因此
$$\|k^P h_P(k\Delta_h)\tilde{\tilde{u}}_h^{(P)}(t_n)\| \leqslant Ck^{P+1}\|u^{(P)}(t_n)\|_2.$$

总起来，我们有

$$\|\varphi_n\| \leqslant Ck^{P+1} \sup_{t_n \leqslant s \leqslant t_{n+1}} \|u^{(P)}(s)\|_2 + Ck^P \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{(P+1)}\|_2 ds,$$

在(15)中利用$E_{k,h}$的稳定性，可得

$$\|W_n\| \leqslant Ck^P\{t_n \sup_{s \leqslant t_n} \{u^{(P)}(s)\|_2 + \int_0^{t_n} \|u^{(P+1)}\|_2 ds.$$

此与前面Z_n和ρ_n的估计结合起来，定理即得证。

我们注意，若时间离散化格式有p阶精确度，但是，对于某个$l<p$，$h_l \neq 0$，则截断误差φ_n将带一个如下形式的附加项，

$$\frac{k^l}{l!} h_l(k\Delta_h)\tilde{\tilde{u}}_h^{(l)} = \frac{k^{l+1}}{l!}\tilde{h}_l(k\Delta_h) P_0 \Delta u^{(l)},\quad \tilde{h}_l(\lambda) = h_l(h)/\lambda.$$

由于对充分小的λ，$\tilde{h}_l(\lambda) = 0(\lambda^{P-l})$，这时由引理2可以结论，若$u^{(l)}$属于适当的空间$\dot{H}^s(\Omega)$，则

$$\left\|\frac{k^l}{l!} h_l(k\Delta_h)\tilde{\tilde{u}}_h^{(l)}\right\| \leqslant Ck\{h^r\|\Delta u^{(l)}\|_{r-2l} + k^P\|\Delta u^{(l)}\|_{2P-2l}\}$$

$$\leqslant Ck\{h^r\|u^{(l)}\|_{r+2-2l} + k^P\|u^{(l)}\|_{2P+2-2l}\}.$$

这一项对总体误差的贡献仍然是$O(h^r+k^P)$阶，但是，正象在定理1中那样，仍然要求令人不满意的边界条件。

可是，在下边的结果里，我们将看到，若全离散格式是$p-1$阶严格精确的，并且满足一附加条件，则在不加任何人为的边界条件假设的情况下，一个最佳阶误差估计仍然成

立。

定理4. 假设格式(2)是p阶精确的和$p-1$阶严格精确的，E_{kh}在L_2中是稳定的，并且还有$\sigma(\lambda)=h_{p-1}(\lambda)(\lambda(1-r(\lambda)))$关于$k\Delta_h$的特征值是有界的，且关于$k$和$h$是一致的；那么，对(2)和(1)的解$U_n$和$u$，在适当的正则性假设下，对于$t_n=nk>0$，则有

$$\|U_n-u(t_n)\|\leqslant Ch^2 t_n \sup_{s\leqslant t_n}\|u_t(s)\|_2$$

$$+Ck^p\{\|u^{(p-1)}(0)\|_2+t_n\|u^{(p)}(0)\|_2$$

$$+(1+t_n)\int_0^{t_n}\|u^{(p+1)}(s)\|_2 ds\}.$$

证明。 由上面的推导可知，附加项对整体误差的贡献是

$$S_n=\sum_{j=0}^{n-1}E_{kh}^{n-1-j}\frac{k^p}{(p-1)!}\tilde{h}_{p-1}(k\Delta_h)\Delta_h P_1 u^{(p-1)}(t_j)$$

$$=\frac{k^p}{(p-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}E_{kh}^{n-1-j}\tilde{h}_{p-1}(k\Delta_h)P_0\Delta u^{(p-1)}(t_j).$$

其中$\tilde{h}_{p-1}(\lambda)=h_{p-1}(\lambda)/\lambda$。由$\sigma(\lambda)$的定义，

$$\tilde{h}_{p-1}(k\Delta_h)=\sigma(k\Delta_h)(I-E_{kh}),$$

因此

$$S_n=\frac{k^p}{(p-1)!}\sigma(k\Delta_h)\sum_{j=0}^{n-1}E_{kh}^{n-1-j}(I-E_{kh})P_0\Delta u^{(p-1)}(t_j)$$

$$=\frac{k^p}{(p-1)!}\sigma(k\Delta_h)P_0\{\Delta u^{(p-1)}(t_{n-1})$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1}E_{kh}^{n-j}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Delta u^{(p)}(s)ds-E_{kh}^n\Delta u^{(p-1)}(0)\}.$$

我们结论

$$\|S_n\| \leqslant Ck^P\{\|u^{(P-1)}(t_{n-1})\|_2 + \|u^{(P-1)}(0)\|_2 + \int_0^{t_{n-1}} \|u^{(P)}\|_2 ds\}$$

$$\leqslant Ck^P\{\|u^{(P-1)}(0)\|_2 + t_n \sup_{s\leqslant t_n} \|u^{(P)}(s)\|_2\}$$

$$\leqslant Ck^P\{\|u^{(P-1)}(0)\|_2 + t_n\|u^{(P)}(0)\|_2 + t_n\int_0^{t_n} \|u^{(P+1)}\|_2 ds\},$$

这个估计式和定理 3 的估计式合起来，即证明了定理4。

利用上面定理2的证明技巧，假如E_{kh}有适当的光滑性质，很明显，后两个定理中所要求的正则性假设，对于$t\leqslant t_s-\delta$，$\delta>0$，还可以进一步地减弱。我们不去详细讨论这方面的情况了。

现在来讨论，对于时间离散化的精度条件。由引理 1 及其后边的讨论我们知道，(2)是 p 阶精确的充分必要条件是

(i) $\qquad r(\lambda)-e^{\lambda}=O(\lambda^{P+1})$，当$\lambda\to 0$时，

以及

(ii)″ $\quad r_l(\lambda)=\dfrac{l!}{\lambda^{l+1}}\left(r(\lambda)-\sum_{j=0}^{l}\dfrac{\lambda^j}{j!}\right)-\sum_{i=1}^{m}\tau_i^l q_i(\lambda)$

$$=o(\lambda^{P-l}),$$

当$\lambda\to 0$时，$l=0,\cdots,p-1$。

对于这种求积节点数目m比p小的情形，我们给出 p 阶格式的其他特性，这些特性可以用来构造此种格式。

引理3. 设$m<p$，则时间离散化格式(2)是 p阶精确的充分必要条件是条件(i)连同

(ii)‴ $\qquad r_l(\lambda)=O(\lambda^{P-l})$，当$\lambda\to 0$时，$l=0,\cdots,m-1$，

以及，对于$\omega(\tau)=\prod_{i=1}^{m}(\tau-\tau_i)$，

(iii) $\int_0^1 \omega(\tau)\tau^j d\tau = 0, \quad j=0,\cdots,p-m-1,$

成立。

证明．首先注意条件(iii)等价于存在$b_1,\cdots,b_m$，使得

(iii)′ $\int_0^1 \varphi(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{m} b_i \varphi(\tau_i), \ \forall \varphi \in \Pi_{p-1},$

成立。为了证明条件(iii)的必要性，只需对于$\varphi=\tau^l$，$l=0,\cdots,P-1$证明(iii)′。然而，利用$r_l(\lambda)$的定义，由(i)和(ii)″有

$$r_l(0) = \frac{1}{l+1} - \sum_{i=1}^{m} \tau_i^l q_i(0) = 0, l=0,\cdots,p-1,$$

所以，对于$b_i = q_i(0)$，有

$$\int_0^1 \tau^l d\tau = \frac{1}{l+1} = \sum_{i=1}^{m} b_i \tau_i^l, \ 对于 l=0,\cdots,p-1.$$

现在证明条件的充分性，为此只需证明(i)，(ii)‴和(iii)包含着

(16) $r_l(\lambda) = O(\lambda^{p-l})$，当$\lambda \to 0$时，对于$l=m,\cdots,p-1$，

由分部积分和(i)，有

$$\frac{\lambda^{l+1}}{l!}\int_0^1 e^{\lambda(1-\tau)}\tau^l d\tau = e^\lambda - \sum_{j=0}^{l} \frac{\lambda^j}{j!} = r(\lambda) - \sum_{j=0}^{l} \frac{\lambda^j}{j!} + O(\lambda^{p+1})$$

当$\lambda \to 0$时，

因此，

$$r_l(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda(1-\tau)}\tau^l d\tau - \sum_{i=1}^{m} \tau_i^l q_i(\lambda) + O(\lambda^{p-l}), 当\lambda \to 0 时.$$

对于前面的$\omega(\tau)$，令$\omega(\tau) = \sum_{i=1}^{m} a_i t^i$。由于$\omega(\tau_i)=0$，通过

展开积分，并利用(iii)，则对于$l=0,\cdots,p-m-1$，我们得到

$$\sum_{j=0}^{m}\alpha_j r_{j+l}(\lambda)=\int_0^1 e^{\lambda(1-\tau)}\tau^l\omega(\tau)d\tau+O(\lambda^{p-m-l})$$

$$=O(\lambda^{p-m-l})，当\lambda\to 0时。$$

由于$\alpha_m=1$，在此式中依次令$l=0,1,\cdots,p-m-1$，并利用(ii)$'''$，即可完成(16)的证明。

对于给定的p和m，$p/2\leqslant m\leqslant p$，现在应用引理3，我们可以构造一个$p$阶精确的和$m$阶严格精确的格式：首先选取$r(\lambda)$使得(i)成立（和具有要求的稳定性质），然后选取互异的实数$\{\tau_i\}_1^m\subset[0,1]$，使得(iii)成立，最后由

$$\sum_{i=1}^{m}\tau_i^l q_i(\lambda)=\frac{l!}{\lambda^{l+1}}\left(r(\lambda)-\sum_{j=0}^{l}\frac{\lambda^j}{j!}\right),\quad l=0,\ \cdots,\ m-1.$$

确定有理函数$\{q_i(\lambda)\}_1^m$。注意，由于τ_i是互异的，所以这个方程组的系数矩阵是非奇异的，并且$q_i(\lambda)$和$r(\lambda)$具有相同的分母。其次再注意条件$p\leqslant 2m$，它对于使得(iii)成立的$\{\tau_i\}_1^m$的存在性是必要的。对于$p=2m$，这些点是唯一确定的，是$[0,1]$上的m阶Gauss求积节点。

例如，设$r(\lambda)$是e^λ的二阶对角线Padé逼近

$$r(\lambda)=\frac{1+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2}{1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2}=e^\lambda+O(\lambda^5)，当\lambda\to 0时，$$

于是$p=4$。现在选取$\tau_{1,2}=\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{6}$，这是2阶Gauss点。此时方程组(ii)$'''$化为

$$q_1(\lambda)+q_2(\lambda)=\frac{1}{\lambda}(r(\lambda)-1),$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)q_1(\lambda)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)q_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}(r(\lambda)-1-\lambda),$$

由此所得格式为

$$\left(I-\frac{1}{2}k\Delta_h+\frac{1}{12}k^2\Delta_h^2\right)U^{n+1}=\left(I+\frac{1}{2}k\Delta_h+\frac{1}{12}k^2\Delta_h^2\right)U_n$$

$$+\frac{1}{2}k\left\{\left(I+\frac{\sqrt{3}}{6}k\Delta_h\right)f\left(t_n+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)k\right)\right.$$

$$\left.+\left(I-\frac{\sqrt{3}}{6}k\Delta_h\right)f\left(t_n+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)k\right)\right\}.$$

这时有

$$r_3(\lambda)=\frac{2}{\lambda^3}\left\{\frac{1+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2}{1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2}-1-\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{6}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{6}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2}=0.$$

可见此格式实际上是3阶严格精确的。由于

$$\sigma(\lambda)=\frac{h_3(\lambda)}{\lambda(1-r(\lambda))}=-\frac{h_3(\lambda)}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2\right)$$

$$=\frac{r_3(\lambda)}{\lambda}\left(1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2\right)=O(1),\ \text{当}\lambda\to 0\text{时},$$

所以，这个函数对于$\lambda\leqslant 0$为有界，因此可以应用定理 4 作误差估计。

对于同样的函数$r(\lambda)$，我们还可以选三个求积节点$\tau_1=0$，$\tau_2=\frac{1}{2}$，$\tau_3=1$。这时，有

$$\int_0^1 \omega(\tau)d\tau=\int_0^1 \tau(\tau-\frac{1}{2})(\tau-1)d\tau=0,$$

于是(iii)成立。现在解方程组

$$q_1(\lambda)+q_2(\lambda)+q_3(\lambda)=\frac{1}{\lambda}(r(\lambda)-1)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2},$$

$$\frac{1}{2}q_2(\lambda)+q_3(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}(r(\lambda)-1-\lambda)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2},$$

$$\frac{1}{4}q_2(\lambda)+q_3(\lambda)=\frac{2}{\lambda^3}(r(\lambda)-1-\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2)=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{12}\lambda^2}.$$

由此可得格式

$$\begin{aligned}(I-\frac{1}{2}k\Delta_h+\frac{1}{12}k^2\Delta_h^2)U_{n+1}&=(I+\frac{1}{2}k\Delta_h+\frac{1}{12}k^2\Delta_h^2)U_n\\&+k\{(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}k\Delta_h)f(t_n)+\frac{2}{3}f(t_n+\frac{1}{2}k)\\&+(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}k\Delta_h)f(t_{n+1})\},\end{aligned}$$

则这个格式至少是3阶严格精确的。因为，由简单的计算，有

$$r_3(\lambda)=\frac{6}{\lambda^4}(r(\lambda)-1-\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{6}\lambda^3)-\frac{1}{8}q_2(\lambda)-q_3(\lambda)=0,$$

实际上，这个格式是4阶严格精确的，并且可用定理3估计误差。

参 考 文 献

这章的大部分内容选自〔1〕，也参考了〔2〕。

1. P. Brenner, M. Crouzeix and V. Thomée, Single step mthods for inhomogeneous linear differential equations in Banach space. RAIRO, Anal. Numer. 16, 5—26(1982).

2. M. Crouzeix, Sur l'approximation des equations différentielles Opérationelles linéaires par des méthodes de Runge-kutta. Thesis. Université Paris Ⅵ. 1975.

第九章　借助间断GALERKIN方法的时间离散化

在前两章里，我们对于热传导方程讨论了全离散格式。全离散格式的推导，首先是用Galerkin有限元法对空间变量进行离散化，然后用一离散方程组代替得到的关于时间的常微分方程组，此离散方程组关于时间变量可以视作为有限差分格式。在这一章里，我们对时间变量也应用Galerkin方法进行离散化，这样在方法的定义和分析上，对时间变量和空间变量的处理是类似的。这里我们将寻求关于t是次数不超过q－1的分片多项式形式的近似解，它在剖分的节点处不一定连续。

象往常一样，设Ω是R^d中具有光滑边界的有限域，考虑初边值问题

$$
(1)\qquad \begin{aligned} u_t-\Delta u&=f, &&\text{于}\ \Omega\times[0,\ \infty)\text{内},\\ u&=0, &&\text{在}\ \partial\Omega\times[0,\ \infty)\text{上},\\ u(\cdot,\ 0)&=V, &&\text{于}\ \Omega\text{内},\end{aligned}
$$

并且假设给定了一有限维子空间族$\{S_h\}$和满足第三章性质(i)和(ii)的一算子族$\{T_h\}$，在S_h上$\Delta_h=-T_h^{-1}$，这样，问题(1)的半离散问题可定义为

$$
(2)\qquad \begin{aligned} u_{h,t}-\Delta_h u_h&=f_h=P_0 f, \qquad \text{对于}\ t\geqslant 0,\\ u_h(0)&=V_h.\end{aligned}
$$

为了作这个常微分方程组的离散近似，我们用$0=t_0<t_1<\cdots<t_n<\cdots$，作$t$轴的不一定是均匀的剖分，并且令$I_n=[t_n,$

$t_{n+1}]$, $t_{n+1}-t_n=k_n$，和$k=\max\limits_n K_n$。然后寻求问题(2)的近似解，它在每个子区间I_n上是t的次数不超过$q-1$的多项式，其系数在S_h中。或者等价地，属于空间

$$\mathscr{S}_{kh}=\{X=X_{kh}:[0,\infty)\to S_h; X|_{I_n}=\sum_{j=0}^{q-1}\chi_j t^j,\ \chi_j\in S_h\}.$$

注意，这些函数在节点处允许是不连续的，但是在那里取成为左连续。对于$U=U_{kh}\in\mathscr{S}_{kh}$，我们分别用$U_n$和$U_n^+$表示在$t_n$点处$U$的值和$U$的上极限值，并且记$\mathscr{S}_{kh}$中函数在$I_n$上的限制为$\mathscr{S}_{kh}^n$。

确定I_n上近似解的离散格式，就是在$\mathscr{S}_{kh}$中寻求U，使得

$$(3)\qquad \int_{I_n}(U_t-\Delta_h U,X)ds+(U_n^+,X_n^+)=(U_n,X_n^+)$$

$$+\int_{I_n}(f,X)ds,\ \forall X\in\mathscr{S}_{kh}^n,$$

或者等价地，

$$\int_{I_n}(U_t-\Delta_h U)(s)(s-t_n)^l ds+(U_n^+-U_n)\delta_{l,0}$$

$$=\int_{I_n}f_h(s)(s-t_n)^l ds,\ l=0,\cdots,q-1.$$

作为递推的起点，我们也设立初始条件

$$U_0=V_{hc}$$

在T_h和Δ_h是由标准Galerkin方法定义和$S_h\subset H_0^1(\Omega)$的特殊情形下，(3)式可以写成

$$\int_{I_n}((U_t,X)+(\nabla U,\nabla X))ds+(U_n^+-U_n,X_n^+)$$

$$=\int_{I_n}(f,X)ds,\ \forall X\in\mathscr{S}_{kh}^n.$$

我们立即可以看到，一旦U_n和$f|_{I_n}$给定，这个方程组便在I_n上确定唯一的解U。实际上，解在I_n上是由S_h中q个元素确定的，或者说，若S_h的维数是N_h，是由qN_h个标量确定的，并且方程的个数（等于$\mathscr{S}_{kh}$的维数）也是qN_h。所以，为了证明存在性，一般地，只证明唯一性就够了，或者证明相应的齐次方程

$$\int_{I_n}(U_t-\Delta_h U,X)ds+(U_n^+,X_n^+)=0,\ \forall X\in\mathscr{S}_{kh}^n,$$

只有零解$U\equiv 0$。为此，在I_n内选$X=U$，由于$(U_t,U)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2$，故得

$$\frac{1}{2}(\|U_{n+1}\|^2-\|U_n^+\|^2)+\int_{I_n}(-\Delta_h U,U)ds+\|U_n^+\|^2=0,$$

或者

$$\frac{1}{2}(\|U_{n+1}\|^2+\|U_n^+\|^2)+\int_{I_n}(-\Delta_h U,U)ds=0.$$

由于$-\Delta_h$是正定的，可见在I_n内$(-\Delta_h U,U)\equiv 0$，从而在I_n内$U\equiv 0$，唯一性得证。

在I_n上，令$U=\sum_{j=0}^{q-1}\tilde{U}_j k_n^{-j}(t-t_n)^j$，则有确定$\tilde{U}_j$的如下方程组

$$\int_{I_n}\Big(\sum_{j=1}^{q-1}j\tilde{U}_j k_n^{-j}(s-t_n)^{j-1}-\sum_{j=0}^{q-1}\Delta_h\tilde{U}_j k_n^{-j}(s-t_n)^j\Big)k_n^{-l}(s-t_n)^l ds+\tilde{U}_0\delta_{l,0}=U_n\delta_{l,0}+\int_{I_n}f_h(s)k_n^{-l}(s-t_n)^l ds,$$

$$l=0,\cdots,q-1,$$

求出方程组左边的积分值之后，得到

$$(4)\quad \sum_{j=1}^{q-1}\frac{j}{j+l}\tilde{U}_j-\sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{j+l+1}k_n\Delta_h\tilde{U}_j+\tilde{U}_0\delta_{l,0}$$

$$=U_n\delta_{l,0}+k_n^{-l}\int_{I_n}f_h(s)(s-t_n)^l ds,\ l=0,\cdots,q-1。$$

特别地，对于$q=1$（关于t是分片常数），便得到确定$U(t)=\tilde{U}_0=U_{n+1}$的方程

$$(5)\qquad (I-k_n\Delta_h)U_{n+1}=U_n+\int_{I_n}f_h ds,$$

这是向后Euler方法的一个变体，如果用数值积分公式$k_n f_h(t_{n+1})$代替积分，则化为通常形式的向后Euler方法。对于$q=2$（关于t是分片线性的），我们得到

$$(I-k_n\Delta_h)\tilde{U}_0+(I-\frac{1}{2}k_n\Delta_h)\tilde{U}_1=U_n+\int_{I_n}f_h(s)ds,$$

$$-\frac{1}{2}k_n\Delta_h\tilde{U}_0+(\frac{1}{2}I-\frac{1}{3}k_n\Delta_h)\tilde{U}_1=k_n^{-1}\int_{I_n}(s-t_n)f_h(s)ds,$$

由这个方程组容易确定$\tilde{U}_0$，$\tilde{U}_1$，从而确定了$U(t)$。特别地注意，对于齐次方程，由简单的计算得到

$$U_{n+1}=\tilde{U}_0+\tilde{U}_1=(I-\frac{2}{3}k_n\Delta_h+\frac{1}{6}k_n^2\Delta_h^2)^{-1}(I+\frac{1}{3}k_n\Delta_h)U_n$$

$$=r_{2,1}(k_n\Delta_h)U_n,$$

其中$r_{2,1}(\lambda)$是e^λ的(2,1)阶子对角线Padé逼近。

一般地，求解方程组(4)，所得$\tilde{U}_j$为关于$k_n\Delta_h$的有理函数作用于(4)的各个右端的一个线性组合。特别地，对于齐次方程，我们有

$$U_{n+1}=\sum_{j=0}^{q-1}\tilde{U}_j=r(k_n\Delta_h)U_n,$$

由克莱姆法则，其中$r(\lambda)$的分子与分母的次数分别不超过$q-1$和q。我们注意到，对于齐次方程，由均匀剖分所得到的方法，在节点上化为第七章里所描述的格式。其次，我们还注意到，由格式的特性，齐次方程的全离散的解算子与Δ_h可以交换。对于非齐次方程情形，右端项f_h，现在变成在I_n上的积分平均值形式，与第八章的情形相对照，那里f_h是在互异求积节点上取值。

假设我们感兴趣的是问题(1)在$(0,t^*)$上的解，特别地，在$t=t^*$处的解，我们将采用$t_N=t^*$的剖分，并且引进整体的双线性形式

$$B(V,W)=\int_0^{t_N}(V_t-\Delta_h V,W)ds+\sum_{n=1}^{N-1}(V_n^+-V_n,W_n^+)$$
$$+(V_0^+,W_0^+).$$

在这里，对于$V\in\mathscr{S}_{kh}$，由V的微商我们把V_t理解为定义在每个小区间I_n上次数不超过$q-2$的分片多项式，这里忽略了节点处不连续的影响。由(3)式求和，我们看到离散方程可以写成

$$B(U,X)=(V_h,X_0^+)+\int_0^{t_N}(f,X)ds,\quad \forall X\in\mathscr{S}_{kh}.$$

由于半离散问题(2)的解显然满足

$$B(u_h,X)=(V_h,X_0^+)+\int_0^{t_N}(f,X)ds,\quad \forall X\in\mathscr{S}_{kh},$$

所以对于误差$U-u_h$，我们有

$$B(U-u_h,X)=0,\quad \forall X\in\mathscr{S}_{kh}.$$

由分部积分得知，上面的双线性形式也可以表示成

$$(6)(BV,W)=\int_0^{t_N}(V,-W_t-\Delta_h W)ds+\sum_{n=1}^{N-1}(V_n,W_n-W_n^+)$$

$$+(V_N,W_N).$$

在我们的误差分析中，也要考虑“向后”的齐次问题，

$$-Z_t-\Delta Z=0,\quad 内\Omega\times[0,t_N]内,$$

$$Z=0,\qquad 在\partial\Omega\times[0,t_N]上,$$

$$Z(\cdot,\ t_N)=\varphi,\quad 于\Omega内,$$

以及相应的半离散问题

$$-Z_{h,t}-\Delta_h Z_h=0,\quad 对于t\leqslant t_N,$$

$$Z_h(t_N)=\varphi_h.$$

由(6)式，显然这个问题的全离散格式是：寻求$Z=Z_{kh}\in\mathscr{S}_{kh}$，使得

$$B(X,Z)=(X_N,\varphi_h),\quad \forall X\in\mathscr{S}_{kh}.$$

特别地，这个问题有唯一解，并且，对于向前问题所得结果，对于向后问题将有与其相似的结果。

下面对时间离散化过程的误差分析，将在带有多种模的空间S_h中进行。然后，U相对于(1)的精确解的完全误差估计，将由前面对半离散问题的误差估计导出。我们将按离散模进行估计，这种离散模类似于前面$\dot{H}^s(\Omega)$的模。利用$-\Delta_h$的特征值和相应的特征函数$\{\Lambda_j\}_1^{N_h}$和$\{\Phi_j\}_1^{N_h}$，对于$V\in S_h$，我们定义离散模为

$$\|V\|_{s,h}=\left(\sum_{j=1}^{N_h}\Lambda_j^s(V,\Phi_j)^2\right)^{1/2}=\|(-\Delta_h)^{s/2}V\|$$

$$=\|T^{-s/2}V\|,$$

其中s允许取正值和负值。

我们首先研究齐次热传导方程，于是(1)和(2)变成

$$(7)\qquad \begin{aligned} u_t &= \Delta u, && \text{于}\Omega\times[0,\infty)\text{内}, \\ u &= 0, && \text{在}\partial\Omega\times[0,\infty)\text{上}, \\ u(\cdot,0) &= V, && \text{于}\Omega\text{内}, \end{aligned}$$

和

$$(8)\qquad \begin{aligned} u_{h,t} &= \Delta_h u_h, \quad t>0, \\ u_h(0) &= V_h. \end{aligned}$$

关于上面的离散模，半离散问题（8）的解具有下述引理所描述的正则性质。

引理1. 设u_h是半离散问题(8)的解，则对于m，$j\geqslant 0$和任意的l，当$t\geqslant 0$，有

$$t^{2m}\|u_h^{(j)}(t)\|_{l,h}^2+\int_0^t s^{2m}\|u_h^{(j)}(s)\|_{l+1,h}^2\,ds\leqslant c\|V_h\|_{l+2j-2m,h}^2.$$

证明. 这个引理可由

$$u_h(t)=\sum_{i=1}^{N_h}e^{-\Lambda_i t}(V_h,\Phi_i)\Phi_i$$

和$u_t^{(j)}=\Delta_h^j u_h$容易得证。

下边的误差分析将基于如下的引理，它包含着所需要的能量估计的技巧。

引理2. 假设ρ是在I_n上给定的函数，并且$\rho_{n+1}=0$，而$\theta\in\mathcal{S}_h^q$满足

$$(9)\qquad \int_{I_n}(\theta_t-\Delta_h\theta,X)ds+(\theta_n^+,X_n^+)=(\theta_n,X_n^+)$$

$$+\int_{I_n}(\rho,X_t+\Delta_h X)ds,\ \forall X\in\mathcal{S}_{h}^q.$$

则对于任意实数l，有

$$(10)\qquad \|\theta_{n+1}\|_{l,h}^2 + \int_{I_n}\|\theta\|_{l+1,h}^2\,ds \leqslant \|\theta_n\|_{l,h}^2 + C\int_{I_n}(\|\rho_t\|_{l-1,h}^2 + \|\rho\|_{l+1,h}^2)\,ds,$$

$$(11)\qquad \|\theta_{n+1}\|_{l,h}^2 + \int_{I_n}\|\theta\|_{l+1,h}^2\,ds \leqslant \|\theta_n\|_{l,h}^2 + C\int_{I_n}(k_n\|\rho_t\|_{l,h}^2 + k_n\|\rho\|_{l+2,h}^2 + k_n^{-1}\|\rho\|_{l,h}^2)\,ds.$$

$$(12)\qquad \int_{I_n}\|\theta_t\|_{l-1,h}^2\,ds \leqslant C\int_{I_n}(\|\theta\|_{l+1,h}^2 + \|\rho_t\|_{l-1,h}^2 + \|\rho\|_{l+1,h}^2)\,ds.$$

和

$$(13)\qquad \left(\int_{I_n}\|\theta_t\|_{l,h}\,ds\right)^2 \leqslant k_n\int_{I_n}\|\theta_t\|_{l,h}^2\,ds \leqslant C\int_{I_n}(\|\theta\|_{l+1,h}^2 + k_n\|\rho_t\|_{l,h}^2 + k_n\|\rho\|_{l+2,h}^2)\,ds.$$

证明. 在(9)中令$X=(-\Delta_h)^l\theta$，则有

$$(14)\qquad \frac{1}{2}(\|\theta_{n+1}\|_{l,h}^2 - \|\theta_n^+\|_{l,h}^2) + \int_{I_n}\|\theta\|_{l+1,h}^2\,ds + \|\theta_n^+\|_{l,h}^2 = ((-\Delta_h)^{l/2}\theta_n, (-\Delta_h)^{l/2}\theta_n^+)$$
$$+ \int_{I_n}((-\Delta_h)^{(l+1)/2}\rho, (-\Delta_h)^{(l-1)/2}(\theta_t + \Delta_h\theta))\,ds$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|\theta_n\|_{l,h}^2 + \frac{1}{2}\|\theta_n^+\|_{l,h}^2 + \varepsilon\int_{I_n}(\|\theta_t\|_{l-1,h}^2 + \|\theta\|_{l+1,h}^2)\,ds + C_\varepsilon\int_{I_n}\|\rho\|_{l+1,h}^2\,ds,$$

由此可得，对于充分小的ε，有

$$\|\theta_{n+1}\|_{l,h}^2+\frac{3}{2}\int_{I_n}\|\theta\|_{l+1,h}^2\,ds$$

$$\leq\|\theta_n\|_{l,h}^2+2\varepsilon\int_{I_n}\|\theta_t\|_{l-1,h}^2\,ds+C_\varepsilon\int_{I_n}\|\rho\|_{l+1,h}^2\,ds.$$

一旦(12)得证，由此即知(10)式成立。为了证明(11)，我们作(14)式第二行里被积函数的估计，或用如下估计式代替

$$|(\rho,(-\Delta_h)^l(\theta_t+\Delta_h\theta))|\leq\frac{1}{4}\|\theta\|_{l+1,h}^2+\|\rho\|_{l+1,h}^2$$
$$+\varepsilon k_n\|\theta_t\|_{l,h}^2+C_\varepsilon k_n^{-1}\|\rho\|_{l,h}^2.$$

这样我们得到

$$\|\theta_{n+1}\|_{l,h}^2+\frac{3}{2}\int_{I_n}\|\theta\|_{l+1,h}^2\,ds\leq\|\theta_n\|_{l,h}^2$$

$$+2\varepsilon k_n\int_{I_n}\|\theta_t\|_{l,h}^2ds+C_\varepsilon\int_{I_n}(\|\rho\|_{l+1,h}^2+k_n^{-1}\|\rho\|_{l,h}^2)\,ds.$$

由此，再考虑到明显的不等式

$$\|\rho\|_{l+1,h}^2\leq\|\rho\|_{l,h}\,\|\rho\|_{l+2,h}\leq\frac{1}{2}k_n^{-1}\|\rho\|_{l,h}^2$$
$$+\frac{1}{2}k_n\|\rho\|_{l+2,h}^2\quad,$$

一旦(13)得证，便知(11)成立。

为了证明(12)式，我们在(9)中令$X(t)=(t-t_n)(-\Delta_h)^{l-1}\theta_t$。由于$\rho_{n+1}=X_n^+=0$，所以在对最后一项分部积分之后，得到

$$\int_{I_n}(s-t_n)\|\theta_t\|_{l-1,h}^2\,ds=\int_{I_n}(s-t_n)(\Delta_h\theta,(-\Delta_h)^{l-1}\theta_t)ds$$
$$-\int_{I_n}(s-t_n)(\rho_t-\Delta_h\rho,(-\Delta_h)^{l-1}\theta_t)ds.$$

因此

$$\int_{I_n}(s-t_n)\|\theta_t\|_{l-1,h}^2\,ds\leq\frac{1}{2}\int_{I_n}(s-t_n)\|\theta_t\|_{l-1,h}^2\,ds$$
$$+\int_{I_n}(s-t_n)\|\theta\|_{l+1,h}^2\,ds+2\int_{I_n}(s-t_n)(\|\rho_t\|_{l-1,h}^2$$

$$+\|\rho\|^2_{l+1,h})ds.$$

注意，因$\|\theta_t\|^2_{l-1,h}$是次数不超过$2q-4$的多项式，故有如下逆不等式

$$(15)\quad k_n\int_{I_n}\|\theta_t\|^2_{l-1,h}ds\leqslant C\int_{I_n}(s-t_n)\|\theta_t\|^2_{l-1,h}ds,$$

由此即可推出(12)成立，从而也就证明了(10)式成立。

在(9)中再令$X(t)=(t-t_n)(-\Delta_h)^l\theta_t$，则得到

$$\int_{I_n}(s-t_n)\|\theta_t\|^2_{l,h}dt=-\int_{I_n}(s-t_n)\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\theta\|^2_{l+1,h}ds$$

$$-\int_{I_n}(s-t_n)(\rho_t-\Delta_h\rho,(-\Delta_h)^l\theta_t)ds$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_{I_n}\|\theta\|^2_{l+1,h}ds+\frac{1}{2}\int_{I_n}(s-t_n)\|\theta_t\|^2_{l,h}ds$$

$$+\int_{I_n}(s-t_n)(\|\rho_t\|^2_{l,h}+\|\rho\|^2_{l+2,h})ds,$$

由此和再利用(15)式即可得到(13)式。

我们首先应用这个能量引理，证明对于齐次方程的离散方法的稳定性。这个离散方法可以写成

$$(16)\quad\int_{I_n}((U_t-\Delta_hU,X)ds+(U_n^+,X_n^+)=(U_n,X_n^+),$$

$$\forall X\in\mathscr{S}^n_{kh}.\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$U_0=V_h,$$

引理3，(16)的解满足

$$\|U(t)\|\leqslant C\|V_h\|.\quad 对于t\geqslant 0.$$

证明．令$\theta=U$，$\rho=0$和$l=0$．由引理2立即可知

$$\|U_{n+1}\|\leqslant\|U_n\|,\quad n\geqslant 0,$$

于是在节点处有

$$\|U_n\| \leqslant \|V_h\|，对于 n \geqslant 0。$$

显然地，对于$t \in I_n$，有

$$\|U(t)\| \leqslant \|U_{n+1}\| + \int_{I_n} \|U_t\| ds,$$

剩下的就是证明后边的积分项也有所要求的估计。然而，由引理2又可推出

$$\left(\int_{I_n} \|U_t\| ds\right)^2 \leqslant \int_{I_n} \|U\|_{1,h}^2 ds \leqslant C\|U_n\|^2 \leqslant C\|V_h\|^2.$$

所以引理得证。

现在来作离散方法的误差分析。为此我们需要半离散问题的精确解u_h在$\mathscr{S}_{kh}$中的一个近似。我们有如下结果：

引理4. 设$\tilde{U} = \tilde{U}_{kh} \in \mathscr{S}_{kh}$是（8）（或（2））的解$u_h$的插值，在$I_n$上它由插值条件

$$\tilde{U}_{n+1} = u_h(t_{n+1})$$

和

$$\tilde{U}\left(t_{n+1} - \frac{m}{q-1}k_n\right) = u_h\left(t_{n+1} - \frac{m}{q-1}k_n\right), m = 1, \cdots, q-1$$

当$q > 1$时

来确定。则存在一个只依赖于q的常数C，使得对于$\rho = \tilde{U} - u_h$，有

$$\sup_{I_n} \|\rho\|_{1,h} \leqslant Ck_n^{j-1} \int_{I_n} \|u_h^{(j)}\|_{1,h} ds, 对于 j = 1, \cdots, q,$$

并且，当$q > 1$时，还有

$$\sup_{I_n} \|\rho_t\|_{1,h} \leqslant Ck_n^{j-2} \int_{I_n} \|u_h^{(j)}\|_{1,h} ds, 对于 j = 2, \cdots, q.$$

证明. 将区间I_n变换成单位区间以后，由熟知的Lagrange插值的结果，不难证明此引理的结论。

利用引理4中定义的$\widetilde{U}$（这里$\widetilde{U}_0=0$）．可以将时间离散化的误差写成如下形式

$$e=U-u_h=(U-\widetilde{U})+(\widetilde{U}-u_h)=\theta+\rho,$$

其中ρ满足引理4的估计式，并且$\theta\in\mathscr{S}_{kh}$。为后边的应用，包括非齐次方程情形，由定义可以看出，对于$X\in\mathscr{S}_{kh}$，

$$\int_{I_n}(\theta_t-\Delta_h\theta,X)ds+(\theta_n^+,X_n^+)$$

$$=\int_{I_n}(U_t-\Delta_hU,X)ds+(U_n^+,X_n^+)$$

$$-\int_{I_n}(\widetilde{U}_t-\Delta_h\widetilde{U},X)ds-(\widetilde{U}_n^+,X_n^+)$$

$$=(U_n,X_n^+)+\int_{I_n}(f_h,X)ds$$

$$-\int_{I_n}(\widetilde{U}_t-\Delta_h\widetilde{U},X)ds-(\widetilde{U}_n^+,X_n^+)$$

$$=(U_n,X_n^+)+\int_{I_n}(u_{h,t}-\Delta_hu_h,X)ds$$

$$-\int_{I_n}(\widetilde{U}_t-\Delta_h\widetilde{U},X)ds-(\widetilde{U}_n^+,X_n^+)$$

$$=(\theta_n,X_n^+)-(\rho_n^+,X_n^+)-\int_{I_n}(\rho_t-\Delta_h\rho,X)ds$$

$$=(\theta_n,X_n^+)+\int_{I_n}(\rho,X_t+\Delta_hX)ds,$$

这里，我们用到由$\widetilde{U}$的定义所知道的事实，$\rho_n=\rho_{n+1}=0$。这个方程正是引理2的能量估计中所用到的形式。

我们现在已经对第一个误差估计作好准备。

定理1． 设U和u_h分别是(16)和(8)的解，则

$$\|U(t)-u_h(t)\|\leqslant Ck^l\|V_h\|_{2l,h}，\text{对于}0\leqslant l\leqslant q，\ t\geqslant 0。$$

证明．由引理1和3，结果对于$l=0$成立．我们将证明它对于$l=q$也成立，然后通过插值即可推出对一般l的结果：实际上，令$V_h=V_{h,k}+(V_h-V_{h,k})$。其中$V_{h,k}=\sum_{k\wedge_j\leqslant 1}(V_h,\Phi_j)\Phi_j$，利用$l=0$和$q$的估计式，容易得到

$$\|U(t)-u_h(t)\|\leqslant Ck^q\|V_{h,k}\|_{2q,h}+C\|V_h-V_{h,k}\|$$
$$\leqslant Ck^l\|V_h\|_{2l,h}。$$

对于上面定义的$\widetilde{U}$和$\rho=\widetilde{U}-u_h$，利用引理4，则对$t\in I_n$有

$$\|\rho(t)\|\leqslant Ck^{q-1}\int_{I_n}\|u_h^{(q)}\|ds\leqslant Ck^q\operatorname*{Sup}_{I_n}\|u_h^{(q)}\|\leqslant Ck^q\|V_h\|_{2q,h}.$$

因此只剩下估计$\theta=U-\widetilde{U}$。我们首先在节点上进行估计。设t_N是一个节点，$\varphi_h\in S_h$是任意的，又设$Z\in\mathscr{S}_{kh}$是向后齐次问题的解，且有$Z_N^+=\varphi_h$，则有

$$B(X,Z)=(X_N,\varphi_h)，\forall X\in\mathscr{S}_{kh}.$$

令$X=\theta$，利用(6)式，我们得到

$$(17)\ (\theta_N,\varphi_h)=B(\theta,Z)=-B(\rho,Z)=\int_0^{t_N}(\rho,Z_t+\Delta_h Z)ds$$

$$\leqslant\left(\int_0^{t_N}\|\rho\|_{1,h}^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^{t_N}(\|Z_t\|_{-1,h}^2+\|Z\|_{1,h}^2)ds\right)^{1/2}$$

将引理2用于向后问题上，容易看出

$$\int_0^{t_N}(\|Z_t\|_{-1,h}^2+\|Z\|_{1,h}^2)ds\leqslant C\|Z_N^+\|^2=C\|\varphi_h\|^2.$$

以及由引理4和1，

$$\int_0^{t_N}\|\rho\|_{1,h}^2\,ds\leqslant Ck^{2q}\int_0^{t_N}\|u_h^{(q)}\|_{1,h}^2\,ds\leqslant Ck^{2q}\|V_h\|_{2q,h}^2,$$

于是由(17)式推出

$$(\theta_N,\varphi_N)\leqslant Ck^q\|V_h\|_{2q,h}\|\varphi_h\|,$$

这样便有

$$\|\theta_N\|\leqslant Ck^q\|V_h\|_{2q,h}.$$

如果$q=1$，这也就完成了证明．若$q>2$，则对于任意$t\in I_n$，我们有

$$\|\theta(t)\|\leqslant\|\theta_{n+1}\|+\int_{I_n}\|\theta_t\|ds,$$

现在剩下估计上式最后一项．由引理2，我们有

$$\left(\int_{I_n}\|\theta_t\|ds\right)^2\leqslant C\int_{I_n}(\|\theta\|_{1,h}^2+k_n\|\rho_t\|^2+k_n\|\rho\|_{2,h}^2)ds$$

$$\leqslant C\|\theta_n\|^2+C\int_{I_n}(k_n\|\rho_t\|^2+k_n\|\rho\|_{2,h}^2+k_n^{-1}\|\rho\|^2)ds,$$

利用已经证明的θ_n的估计以及引理4与1，我们推出

$$\int_{I_n}\|\theta_t\|ds\leqslant Ck^q\{\|V_h\|_{2q,h}+\operatorname*{Sup}_{I_n}(\|u_h^{(q)}\|+\|u^{(q-1)}\|_{2,h})\}$$

$$\leqslant Ck^q\|V_h\|_{2q,h},$$

这样就证明了定理。

我们现在要证明在节点上有超收敛性，并且在那里的收敛阶是$O(k^{2q-1})$。

定理2。设$q>1$，U和u_h分别是(16)和(8)的解，则在每一节点t_N上，有

$$\|U_N-u_h(t_N)\|\leqslant Ck^{2q-1}\|V_h\|_{4q-2,h}.$$

证明，设$\varphi_h\in S_h$是任意的，Z_h是齐次半离散向后问题以$Z_h(t_N)=\varphi_h$为初始值的解，并设$Z=Z_{kh}$是相应的全离散

解，则对于引理4中的 $\tilde{U}$， 令$\rho=\tilde{U}-u_h, e=U-u_h$和$\xi=Z-Z_h$，我们有

$$(e_N,\varphi_h)=B(e,Z_h)=B(e,Z_h-Z)=B(\tilde{U}-u_h,Z_h-Z)$$

$$=\int_0^{t_N}(\rho,\xi_t+\Delta_h\xi)ds$$

$$\leqslant C\left(\int_0^{t_N}\|\rho\|^2_{2q-1,h}ds\right)^{1/2}\left(\int_0^{t_N}(\|\xi_t\|^2_{-2q+1,h}+\|\xi\|^2_{-2q+3,h})ds\right)^{1/2}.$$

这里，由上面的推导，

$$\int_0^{t_N}\|\rho\|^2_{2q-1,h}ds\leqslant Ck^{2q}\int_0^{t_N}\|u^{(q)}\|^2_{2q-1,h}ds\leqslant Ck^{2q}\|V_h\|^2_{4q-2,h}.$$

我们将证明

$$(18)\int_0^{t_N}(\|\xi_t\|^2_{-2q+1,h}+\|\xi\|^2_{-2q+3,h})ds\leqslant Ck^{2q-2}\|\varphi_h\|^2,$$

由此可以推出

$$(e_N,\varphi_h)\leqslant Ck^{2q-1}\|V_h\|_{4q-2,h}\|\varphi_h\|.$$

这样就证明了定理。

为了证明(18)式，我们采用相应的向前问题的记号，于是，我们现在要证等价的结论

$$\int_0^{t_N}(\|e_t\|^2_{-2q+1,h}+\|e\|^2_{-2q+3,h})ds\leqslant Ck^{2q-2}\|V_h\|^2.$$

首先，由引理4有

$$\int_0^{t}\|\rho_t\|^2_{-2q+1,h}+\|\rho\|^2_{-2q+3,h})ds$$

$$\leqslant Ck^{2q-2}\int_0^{t_N}(\|u_h^{(q)}\|_{-2q+1,h}^2+\|u_h^{(q-1)}\|_{-2q+3,h}^2)ds$$

$$\leqslant Ck^{2q-2}\int_0^{t_N}\|u_h\|_{1,h}^2\,ds\leqslant Ck^{2q-2}\|V_h\|^2.$$

剩下的是证明对于$\theta=U-\tilde{U}$的相应估计。通过对引理2 中的(10)式和(12)式求和，则有（由于$\theta_0=0$）

$$\int_0^{t_N}(\|\theta_t\|_{-2q+1,h}^2+\|\theta\|_{-2q+3,h})dC\leqslant c\int_0^{t_N}(\|\rho_t\|_{-2q+1,h}^2$$

$$+\|\rho\|_{-2q+3,h}^2)ds\leqslant Ck^{2q-2}\|V_h\|^2,$$

由此(18)式得证。

已知由U_n过渡到U_{n+1}，相当于用$r(k_n\Delta_h)$乘U_n，此处r是一个有理函数，具有次数分别为$q-1$和q的分子和分母。由于具有$2q-1$阶逼近精度的如此之函数，是相应的 Padé 逼近，用第七章的记号，由定理2，我们结论$r(\lambda)=\lambda_{q,q-1}(\lambda)$。

上面的误差估计，仅仅考虑了半离散问题时间离散化的误差，并且右端的模都与h有关。我们现在就全离散解与(7)的精确解之间的误差即全误差给出某些估计。

定理3. 假设所选取的离散初值满足

$$\|V_h-V\|\leqslant Ch^r\|V\|_r.$$

则对于(16)和(7)的解，有误差估计

(19) $\|U(t)-u(t)\|\leqslant C\{h^r\|V\|_r+k^q\|V\|_{2q}\}$.对于 $t\geqslant 0$，当$V\in\dot{H}^{\max(r,2q)}(\Omega)$时，

并且，在节点上有

(20) $\|U_N-u(t_N)\|\leqslant C\{h^r\|V\|_r+k^{2q-1}\|V\|_{4q-2}\}$，对于$t_N\geqslant 0$，当$V\in\dot{H}^{\max(r,4q-2)}(\Omega)$时。

证明。 这里的证明沿用第七章定理 3 证明的思路。首先

我们注意到，由全离散格式的稳定性，我们可以假设$V_h = P_0 V$。用$F(t)V = U(t) - u_h(t)$定义算子$F(t) = F_{kh}(t)$: $L_2(\Omega) \to S_h$，其中U和u_h是（16）和（8）的解，具有$U(0) = u_h(0) = P_0 V$，则定理1的结果表明

$$\|F(t)T_h^l V\| \leqslant Ck^l \|\Delta_h^l P_0 T_h^l V\| = Ck^l \|P_0 V\| \leqslant Ck^l \|V\|,$$

$$\text{对于} 0 \leqslant l \leqslant q.$$

现在对于$s \geqslant 0$来确定$V_k \in \dot{H}^s(\Omega)$，使得（参看第七章定理3的证明），

$$\|V - V_k\| \leqslant Ck^q \|V\|_{2q},$$

$$\|V_k\|_{2q} \leqslant C\|V\|_{2q},$$

和

$$\|V_k\|_{r+2j} \leqslant Ck^{-j} \|V\|_r. \quad \text{对于} j = 0, \cdots, q-1.$$

由$F(t)$的稳定性，我们有

$$\|F(t)(V - V_k)\| \leqslant C\|V - V_k\| \leq Ck^q \|V\|_{2q}.$$

其次，注意

$$F(t)V_k = \sum_{j=0}^{q-1} F(t)T_h^j (T - T_h)(-\Delta)^{j+1} V_k + F(t)T_h^q (-\Delta)^q V_k,$$

此处，对于$j = 0, \cdots, q-1$，有

$$\|F(t)T_h^j (T - T_h)(-\Delta)^{j+1} V_k\| \leq Ck^j \|(T - T_h)\Delta^{j+1} V_k\| \leq Ck^j h^r \|\Delta^{j+1} V_k\|_{r-2} \leq Ck^j h^r \|V_k\|_{r+2j} \leq Ch^r \|V\|_r,$$

和

$$\|F(t)T_h^q (-\Delta)^q V_k\| \leq Ck^q \|\Delta^q V_k\| \leq Ck^q \|V\|_{2q}.$$

综合以上这些估计式，得到

$$\|U(t) - u_h(t)\| \leq C\{h^r \|V\|_r + k^q \|V\|_{2q}\}.$$

再由已知的半离散问题的误差估计（第三章定理1）这就完成了（19）的证明。（20）的证明与此类似。

现在来证明，前面遇到的那种类型的非光滑初值误差估计，在目下情况也是正确的。

定理4. 假设对于$n>0$有$k_n \le \gamma k_{n-1}$，其中γ是与剖分无关的常数。则对于(16)和(8)的解U和u_h。有

(21) $\quad \|U(t)-u_h(t)\| \le Ck^q t^{-q}\|V_h\|$，对于$t>0$，

并且在节点上有

(22) $\|U_N-u_h(t_N)\| \le Ck^{2q-1}t^{-2q+1}\|V_h\|$，对于$t_N>0$。

证明. 我们首先证明

(23) $\quad \|U(t)-u_h(t)\| \le Ck^{1/2}t^{-1/2}\|V_h\|$，对于$t>0$，

然后用第三章定理2的迭代论证方法完成本定理的证明。

象通常那样，将误差写成$U-u_h=(U-\tilde{U})+(\tilde{U}-u_h)=\theta+\rho$，其中$\tilde{U}$现在定义为分片常数，并且$\tilde{U}_n=u_h(t_n)$。为了证明(23)式，只需在节点上估计$\theta_n$。由引理2和4（对$q=1$情形），我们有

$$\|\theta_{n+1}\|^2 \le \|\theta_n\|^2 + C\int_{I_n}(k_n\|\rho_t\|^2 + k_n\|\rho\|_{2,h}^2 + k_n^{-2}\|\rho\|^2)ds$$

$$\le \|\theta_n\|^2 + C\int_{I_n}(k_n\|u_{h,t}\|^2 + k_n^3\|u_{h,t}\|_{2,h}^2)ds,$$

乘以$t_{n+1}=t_n+k_n$以后，得

$$t_{n+1}\|\theta_{n+1}\|^2 \le t_n\|\theta_n\|^2 + k_n\|\theta_n\|^2$$

$$+Ct_{n+1}\int_{I_n}(k_n\|u_h\|_{2,h}^2 + k_n^3\|u_h\|_{4,h}^2)ds.$$

因此，对于$n\ge 1$，利用$k_n\le\gamma k_{n-1}$和对第二项用逆估计，又得

$$t_{n+1}\|\theta_{n+1}\|^2 \le t_n\|\theta_n\|^2 + C\int_{I_{n-1}}\|\theta\|^2 ds + Ck_n\int_{I_n}(s\|u_h\|_{2,h}^2$$

$$+s^3\|u_h\|_{4,h}^2)ds,$$

求和以后，由于$\theta_1=U_1-u_h(t_1)$，则得

$$t_N\|\theta_N\|^2\le k_1\|\theta_1\|^2+C\int_0^{t_N}\|\theta\|^2ds+Ck\int_0^{t_N}(s\|u_k\|_{2,h}^2$$

$$+s^3\|u_k\|_{4,h}^2)ds\le Ck\|V_k\|^2+C\int_0^{t_N}\|\theta\|^2ds_{\circ}$$

为了估计后边的积分项，由引理2我们看出

$$\int_0^{t_N}\|\theta\|^2ds\le C\sum_{n=0}^{N-1}\int_{I_n}(k_n\|\rho_t\|_{-1,h}^2+k_n\|\rho\|_{1,h}^2$$

$$+k_n^{-1}\|\rho\|_{-1,h}^2)ds.$$

这里

$$\int_0^{t_1}k_0\|\rho\|_{1,h}^2\,ds\le 2k_0\int_0^{t_1}\|u_k\|_{1,h}^2\,ds+2k_0^2\|u_k(t_1)\|_{1,k}^2$$

$$\le Ck\|V_k\|^2,$$

并且，与上面类似有

$$\sum_{n=0}^{N-1}\int_{I_n}(k_n\|\rho_t\|_{-1,h}^2+k_n^{-1}\|\rho\|_{-1,h}^2)ds+\sum_{n=1}^{N-1}\int_{I_n}k_n\|\rho\|_{1,h}^2\,ds$$

$$\le Ck\int_0^{t_N}\|u_{k,t}\|_{-1,h}^2ds+Ck\int_0^{t_N}s^2\|u_{k,t}\|_{1,h}^2\,ds\le Ck\|V_k\|^2,$$

于是综合这些估计，得到

$$t_N\|\theta_N\|^2\le Ck\|V_k\|^2,$$

这就在$t=t_N$上完成了(23)的证明。

为了对于一般的t证明(23)，首先让我们注意到，因在I_0上$kt^{-1}\ge 1$，故由稳定性立即可知结果在I_0上成立。然后再注意，对于$t\in I_n$，$n\ge 1$，由于$k_{n-1}t_n^{-1}\le 1$和$t_n^{-1}\le Ct^{-1}$，我们有

$$\|\rho(t)\| \leq Ck_n \operatorname*{Sup}_{I_n}\|u_{h,t}\| \leq Ck_{n-1}t_n^{-1}\|V_h\| \leq Ck^{1/2}t^{-1/2}\|V_h\|$$

其次，由显然的类似估计（当$q=1$时，$\theta_t=0$），有

$$\|\theta(t)\| \leq \|\theta_{n+1}\| + \int_{I_n}\|\theta_t\|ds$$

$$\leq C\{\|\theta_{n+1}\| + \|\theta_n\| + \operatorname*{Sup}_{I_n}(k_n\|\rho_t\| + k_n\|\rho\|_{2,h} + \|\rho\|)\}$$

$$\leq Ck^{1/2}t^{-1/2}\|V_h\|.$$

综上所述证明了(23)式。

现在用迭代论证方法来证明(21)式。由稳定性，我们可以只限于考虑$t \geq ck$，其中c是一个任意固定的正数。设$E_h(t)$是半离散问题的解算子，$E_{kh}(t,t_i)$是由点t_i开始的整体离散解算子。令$F_{kh}(t,t_i)=E_h(t-t_i)-E_{kh}(t,t_i)$，并设$t_M$是使$|t_m-t/2|\leq k/2$成立的一个节点，我们有等式

$$F_{kh}(t,0)=F_{kh}(t,t_M)E_h(t_M)+E_h(t-t_M)F_{kh}(t_M,0)$$

$$-F_{kh}(t,t_M)F_{kh}(t_M,0)。$$

由定理1有

$$\|F_{kh}(t,t_i)V_h\| \leq Ck^q\|V_h\|_{2q,h},$$

又因Δ_h和$F_{kh}(t,t_i)$是可交换的，所以

$$\|F_{kh}(t,t_i)V_h\|_{-2q,h} \leq Ck^q\|V_h\|。$$

这样一来，利用引理1，特别有

$$\|F_{kh}(t,t_n)E_h(t_M)V_h\| \leq Ck^q\|E_h(t_M)V_h\|_{2q,h}$$

$$\leq Ck^q t_M^{-q}\|V_h\| \leq Ck^q t^{-q}\|V_h\|。$$

和

$$\|E_h(t-t_M)F_{kh}(t_M,0)V_h\| \leq C(t-t_M)^{-q}\|F_{kh}(t_M,0)V_h\|_{-2q,h}$$

$$\leq Ct^{-q}k^q\|V_h\|。$$

最后，由(23)式，

$$\|F_{kh}(t,t_M)F_{kh}(t_M,0)V_h\| \le Ck^{1/2}(t-t_M)^{-1/2}\|F_{kh}(t_M,0)V_h\| \le Ck^{1/2}t^{-1/2}\|F_{kh}(t_M,0)V_h\|,$$

这样，综合上述估计，得到

$$\|F_{kh}(t,0)V_h\| \le Ck^q t^{-q}\|V_h\| + Ck^{1/2}t^{-1/2}\|F_{kh}(t_M,0)V_h\|.$$

用通常的方法反复应用上面的估计式，即可得到定理的第一个结论(21)式。类似地可以证明(22)式成立。

作为定理 4 的一个明显地推论，我们有如下完全离散的误差估计。

定理5. 设U是(16)的解且$V_h = P_0 V$，而u是(7)的解，则有

$$\|U(t)-u(t)\| \le C(h^r t^{-r/2} + k^q t^{-q})\|V\|, \text{ 对于} t>0,$$

和

$$\|U_N - u(t_N)\| \le C(h^r t_N^{-r/2} + k^{2q-1} t_N^{-2q+1})\|V\|, \text{ 对于} t_N > 0.$$

我们在结束这一章之前，简短地讨论一下非齐次问题(1)和相应的全离散问题(3)。我们首先对于半离散问题的时间离散化证明一个整体的误差估计。

定理6. 设U和u_h分别是(3)和(2)的解，则有

$$\|U(t)-u_h(t)\| \le Ck^q\{\|u_h^{(q)}(0)\| + \operatorname*{Sup}_{s\le t_{n+1}} \|f^{(q-1)}(s)\| + \left(\int_0^{t_{n+1}} \|f^{(q)}\|^2 ds\right)^{1/2}\}, \text{ 对于} t\in I_n.$$

证明。 象通常那样，令$U-u_h = (U-\tilde{U}) + (\tilde{U}-u_h) = \theta+\rho$，对其中的$\rho$，由引理4有

$$\|\rho(t)\| \le Ck^q \operatorname*{Sup}_{I_n}\|u_h^{(q)}\|, \quad t\in I_n.$$

完全象定理1的证明那样，我们得到

$$\|\theta_n\|^2 \le \int_0^{t_n} \|\rho\|_{1,h}^2 ds \le Ck^{2q}\int_0^{t_n} \|u_h^{(q)}\|_{1,h}^2 ds,$$

以及在I_n上，

$$(24)\quad \|\theta(t)\|^2 \leq (\|\theta_{n+1}\| + \int_{I_n} \|\theta_t\| ds)^2$$

$$\leq C\{\|\theta_{n+1}\|^2 + \|\theta_n\|^2 + \int_{I_n} (k_n\|\rho_t\|^2 + k_n\|\rho\|_{2,h}^2$$

$$+ k_n^{-1}\|\rho\|^2) ds\} \leq Ck^{2q}\{\int_0^{t_{n+1}} \|u_h^{(q)}\|_{1,h}^2 ds$$

$$+ \mathop{\mathrm{Sup}}_{I_n}(\|u_h^{(q)}\|^2 + \|u^{(q-1)}\|_{2,h}^2)\}.$$

为了估计(24)右边的量，我们对(2)微分以得

$$u_{h,t}^{(q)} - \Delta_h u_h^{(q)} = P_0 f^{(q)},\quad t \geq 0,$$

因此，由通常的能量估计方法，可得

$$\|u_h^{(q)}(t)\|^2 + \int_0^t \|u_h^{(q)}\|_{1,h}^2 ds \leq \|u_h^{(q)}(0)\|^2 + C\int_0^t \|f^{(q)}\|_{-1,h}^2 ds.$$

又由于

$$\|u_h^{(q-1)}\|_{2,h} = \|\Delta_h u_h^{(q-1)}\| \leq \|f^{(q-1)}\| + \|u_h^{(q)}\|$$

和

$$\|f^{(q)}\|_{-1,h} \leq \|f^{(q)}\|,$$

故定理得证。

上面的估计可以与半离散问题的适当误差估计相结合，比如第二章的定理 3，借以求得$O(h^r + k^q)$阶的完全离散的误差估计。可是，为了此目的能够成功的达到，我们必须这样选取V_h，一方面使得$\|V_h - V\| = O(h^r)$，另一方面，使得$\|u_h^{(q)}(0)\|$关于h是有界的。例如，可以选取V_h使得$u_h^{(q)}(0) = P_0 u^{(q)}(0)$，在第六章里看到，这等价于取$V_h$为拟投影

$$V_h = P_0 V + \sum_{l=0}^{q-1} (-T_h)^l P_0 (P_1 - I) u^{(l)}(0),$$

其中$u^{(l)}(0)$可以由f和V通过微分方程来计算。当$u^{(l)}(0)$充分光滑时，显然V_h-V是$O(h^r)$阶。我们同时注意到，由稳定性，任何使得$\|V_h-V\|=O(h^r)$的V_h的选择，都可以给出期望的误差界。

现在来考虑$q>1$情形在节点上的误差。由上面定理2的证明，我们得到

$$\|e_n\|^2\leq Ck^{2q-2}\int_0^{t_n}\|\rho\|^2_{2q-1,h}\,ds\leq Ck^{4q-2}\int_0^{t_n}\|u_h^{(q)}\|^2_{2q-1,h}ds\,.$$

在这里，如果想要用初值来估计右端，那么就需要引进形如$\Delta_h^l P_0 f$的表达式，其中l是正数，正象第八章开始时的那种情形，这将导致对f要求人为的边界条件。例如，当$q=2$(分片线性逼近函数的情形）时，我们需要估计$\|u_h^{(2)}\|_{3,h}=\|\Delta_h u_h^{(2)}\|_{1,h}=\|u_h^{(3)}-f_h^{(2)}\|_{1,h}$，并且，除非$f^{(2)}$在$\partial\Omega$上为0，一般说来，$\|f_h^{(2)}\|^2_{1,h}=-(\Delta_h P_0 f^{(2)},P_0 f^{(2)})$，当$h$充分小时是无界的。可是，不管怎样，将上面的论证稍作修改，即可对于这种特殊情形证明如下几乎最佳阶的结果。

定理7. 设$q=2$，U和u_h分别是(3)和(2)的解，假定对于$n>0$，$k_n\leq\gamma k_{n-1}$，其中γ与剖分无关。则有

$$\|U_N-u_h(t_N)\|\leq Ck^3\log\frac{1}{k}\{\|u_h^{(3)}(0)\|+\|f^{(2)}(0)\|+\int_0^{t_N}\|f^{(3)}\|ds\}\,,$$

对于$0\leq t_N\leq t^*$。

证明. 对于$\varphi_h\in S_h$，设Z_h是向后半离散齐次问题的解，并且$Z_h(t_N)=\varphi_h$，Z是相应的全离散解，$\tilde{U}$是u_h的分片线性插值，并令$e=U-u_h$，$\rho=\tilde{U}-u_h$和$\zeta=Z-Z_h$，则有（参见定理2的证明）

$$(e_N,\varphi_h)=\int_0^{t_N}(\rho,\zeta_t+\Delta_h\zeta)ds$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{s<t_N}\|\rho\|_{2,h}\int_0^{t_N}(\|\zeta_t\|_{-2,h}+\|\zeta\|)ds$$

$$\leq Ck^2\operatorname*{Sup}_{s<t_N}\|u_{h,tt}\|_{2,h}\int_0^{t_C}(\|\zeta_t\|_{-2,h}+\|\zeta\|)ds.$$

下边我们将证明

$$(25)\qquad \int_0^{t_N}(\|\zeta_t\|_{-2,h}+\|\zeta\|)ds\leq Ck\log\frac{1}{k}\|\varphi_h\|,$$

由此我们可以推出

$$\|e_N\|\leq Ck^3\log\frac{1}{k}\operatorname*{Sup}_{S<t_N}\|u_{h,tt}\|_{2,h}.$$

这里，

$$\|u_{h,tt}\|_{2,h}=\|\Delta_h u_h^{(2)}\|\leq\|f_h^{(2)}\|+\|u_h^{(3)}\|,$$

另外，对于(2)的一个明显的能量估计表明

$$\|u_h^{(3)}(t)\|\leq\|u_h^{(3)}(0)\|+\int_0^{t_N}\|f^{(3)}\|ds,$$

由此可导出所期待的结果。

剩下的是证明(25)式，或者等价地，对于齐次向前问题证明相应地估计，为此，我们将证明对于以V_h为初值的向前齐次问题半离散和全离散解u_h和U，有

$$(26)\qquad \int_{I_n}(\|e_t\|_{-2,h}+\|e\|)ds\leq C\min(k_n,kk_nt_n^{-1})\|V_h\|.$$

暂时假设这个不等式成立，再利用$k_n\leq\gamma k_{n-1}$并选取t_m使得$k\leq t_m\leq 2k$，则有

$$\int_0^{t_N}(\|e_t\|_{-2,h}+\|e\|)ds\leq C\Big(\sum_{i=0}^{m}k_i+k\sum_{j=m+1}^{N-1}\frac{k_{j-1}}{t_j}\Big)\|V_h\|$$

$$\leq C(t_{m+1}+k\log\frac{t_N}{t_m})\|V_h\|\leq Ck\log\frac{1}{k}\|V_h\|,$$

由此(25)得证。

为了证明(26)式，首先注意由引理4，对于 $n\geq 1$ 我们有

$$\operatorname*{Sup}_{I_n}(\|\rho_t\|_{-2,h}+\|\rho\|)\leq Ck_n\operatorname*{Sup}_{I_n}(\|u_{h,tt}\|_{-2,h}+\|u_{h,t}\|)$$

$$\leq Ck_n t_n^{-1}\|V_h\|,$$

又由定理4，

$$\operatorname*{Sup}_{I_n}\|\theta\|\leq\operatorname*{Sup}_{I_n}(\|e\|+\|\rho\|)\leq Ckt_n^{-1}\|V_h\|,$$

于是得到

$$\int_{I_n}(\|\theta\|+\|\rho_t\|_{-2,h}+\|\rho\|)ds\leq Ckk_n t_n^{-1}\|V_h\|.$$

另外，由引理2又有

$$\int_{I_n}\|\theta_t\|_{-2,h}ds\leq Ck_n^{1/2}\Big(\int_{I_n}\|\theta_t\|_{-2,h}^2ds\Big)^{1/2}$$

$$\leq Ck_n^{1/2}\Big(\int_{I_n}(\|\theta\|^2+\|\rho_t\|_{-2,h}^2+\|\rho\|^2)ds\Big)^{1/2}$$

$$\leq Ck_n\operatorname*{Sup}_{I_n}(\|\theta\|+\|\rho_t\|_{-2,h}+\|\rho\|)$$

$$\leq Ckk_n t_n^{-1}\|V_h\|,$$

综上所述，得到

$$\int_{I_n}(\|e_t\|_{-2,h}+\|e\|)ds\leq Ckk_n t_n^{-1}\|V_h\|.$$

由稳定性我们有

$$\int_{I_n}\|e\|ds \leq ck_n \sup_{I_n}(\|U\|+\|u_h\|) \leq Ck_n\|V_h\|.$$

还有

$$\int_{I_n}\|u_{h,t}\|_{-2,h}ds=\int_{I_n}\|u_h\|ds \leq Ck_n\|V_h\|,$$

并且，由引理2，

$$\int_{I_n}\|U_t\|_{-2,h}ds \leq Ck_n^{1/2}\left(\int_{I_n}\|U\|^2ds\right)^{1/2} \leq Ck_n\|V_h\|,$$

于是得到

$$\int_{I_n}\|e_t\|_{-2,h}ds \leq Ck_n\|V_h\|.$$

综合以上估计，证明了(26)式，从而定理得证。

参 考 文 献

上面的内容是由〔1〕改写的。对于常微分方程组的不连续Galerkin方法是在〔2〕中提出并加以分析的。对于偏微分方程的应用，例如参看〔3〕,〔4〕.文献〔5〕对向后Euler方法的变体(5)进行了分析。

1. K. Eriksson, C. Johnson and V. Thomée. A Discontinuous in time Galerkin method for parabolic type problems. Under preparation.

2. M. C. Delfour, W. W. Hager and F. Trochu, Discontinuous Galerkin methods for ordinary differential equations. Math. Comput. 36, 455—473(1981).

3. P. Lesaint and P. A. Raviart, On a finite element method for solving the neutron transport equation. Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Diff-

erential Equations, ed. de Boor, Academic Press, 89—123(1974).

4. P. Jamet, Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for parabolic equations in a variable domain. SIAM J. Numer. Anal. 15, 912—928 (1978).

5. M. Luskin and R. Rannacher, On the smoothing property of the Galerkin method for parabolic equations. SIAM J. Numer. Anal. 19, 93—113(1981).

第十章 一个非线性问题

在这一章里，我们要讨论前边的分析对于非线性问题的应用。为了简单和具体起见，我们只限于考虑第一章开头提出的两个空间变量和分片线性逼近函数的情形。

设Ω是具有光滑边界的平面凸区域，并且考虑抛物问题

$$u_t - \nabla\cdot(a(u)\nabla u) = f(u), \text{于}\Omega\times[0,T]\text{内},$$

$$u = o, \qquad \text{在}\partial\Omega\times[o,T]\text{上},$$

$$u(\cdot, o) = V, \qquad \text{于}\Omega\text{内},$$

其中a和f是光滑函数且a是正的，

(1) $$o < \mu \leqslant a(u) \leqslant M, \text{对于} u \in R,$$

a和f为整体Lipschitz连续，于是对于u，$v \in R$，有

(2) $$|a(u) - a(v)| \leqslant L|u - v|,$$

$$|f(u) - f(v)| \leqslant L|u - v|.$$

我们假设上面的问题具有唯一解，并且为了我们讨论的需要，假设解是充分光滑的。

象在第一章里那样，设$\mathscr{T}_h$是Ω的拟一致三角剖分，$\max\limits_{\tau\in\mathscr{T}_h}$ $\operatorname{diam}\tau \leqslant h$，并且设$S_h$是由在$\Omega$上连续，在$\mathscr{T}_h$的每一个三角形上为线性，在$\partial\Omega$上取0值的所有函数构成的有限维空间。我们可以设立半离散问题：寻求，$u_h:[0,T]\to S_h$，使得

(3) $$(u_{h,t},\chi) + (a(u_h)\nabla u_h, \nabla\chi) = (f(u_h),\chi), \forall\chi\in S_h,$$

$$u_h(0) = v_h,$$

其中V_h是V在S_h中的一个近似。将半离散问题(3)的解表示成如下的形式，

$$u_h(x,t)=\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j(t)\varphi_j(x),$$

其中 $\{\varphi_j\}_1^{N_h}$ 是棱锥形函数构成的标准基，半离散问题可以写成

$$\sum_{j=1}^{N_h}\alpha'_j(t)(\varphi_j,\varphi_k)+\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j(t)(a(\sum_{l=1}^{N_h}\alpha_l(t)\varphi_l)\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_k)=$$

$$(f(\sum_{l=1}^{N_h}\alpha_l(t)\varphi_l),\varphi_k),$$

$$k=1,\cdots\cdots\cdots,N_h.$$

若令$\alpha(t)=(\alpha_1(t),\cdots,\ \alpha N_h(t))^T$，$A=(a_{jk})$和$a_{jk}=(\varphi_j,\varphi_k)$，则此方程也可叙述成如下形式，

(4) $\quad A\alpha'(t)=F(\alpha(t)),\qquad t\geqslant 0,$

$$\alpha(0)=r.$$

由于A是正定的 这个非线性常微分方程组至少局部地有唯一解。事实上，由于我们对a和f所作的假设，向量值函数F是整体 Lipschitz 连续的，所以对所有正的t解 $\alpha(t)$存在。

我们要估计半离散问题的误差，象先前那样，将误差写成

(5) $\quad u_h-u=(u_h-\tilde{u}_h)+(\tilde{u}_h-u)=\theta+\rho,$

其中$\tilde{u}_h$是精确解u在S_h中的椭圆投影。这里我们所用的投影是由

(6) $\quad (a(u)\nabla(\tilde{u}_h-u),\ \nabla\chi)=0,\qquad \forall\chi\in S_h,$

定义的。我们需要这个投影的某些误差估计。

引理 1. 设a是Ω上的一个光滑函数，并且有

$$0<\mu\leqslant a(x)\leqslant M,\qquad 对于x\in\Omega,$$

设V_h是由下式定义的

$$(a\nabla(V_h - V), \nabla\chi) = 0, \qquad \forall \chi \in S_h.$$

则有

(7) $$\|\nabla(V_h - V)\| \leqslant C_1 h \|V\|_2,$$

和

(8) $$\|V_h - V\| \leqslant C_0 h^2 \|V\|_2,$$

其中 C_0，C_1依赖于剖分$\mathscr{T}_h$，μ和M，并且c_0 还与 ∇a 的上界有关。

证明. 对于$\chi \in S_h$，我们有

$$\mu\|\nabla(V_h - V)\|^2 \leqslant (a\nabla(V_h - V), \nabla(V_h - V)) =$$
$$(a\nabla(V_h - V), \nabla(\chi - V))$$
$$\leqslant M\|\nabla(V_h - V)\| \|\nabla(\chi - V)\|,$$

由此并利用V的插值$I_h V$，可得

$$\|\nabla(V_h - V)\| \leqslant C\|\nabla(I_h V - V)\| \leqslant Ch\|V\|_2,$$

这就是(7)式。为了用对偶论证方法证明(8)式，我们考虑边值问题

(9) $$-\nabla(a\nabla\psi) \equiv -a\Delta\psi - \nabla a \cdot \nabla\psi = \varphi, \quad 于\Omega内,$$
$$\psi = 0, \qquad 在\partial\Omega上,$$

并且注意

$$\mu\|\nabla\psi\|^2 \leqslant (a\nabla\psi, \nabla\psi) = (\varphi, \psi) \leqslant \|\varphi\|\|\psi\| \leqslant C\|\varphi\|\|\nabla\psi\|,$$

于是有

$$\|\nabla\psi\| \leqslant C\|\varphi\|.$$

由于∇a是有界的，故还有

$$\|\psi\|_2 \leqslant C\|\Delta\psi\| \leqslant C\|a\Delta\psi\| = C\|\varphi + \nabla a \cdot \nabla\psi\| \leqslant C\|\varphi\|.$$

所以，若令$\chi = I_h\psi$，则

$$(V_h - V, \varphi) = (a\nabla(V_h - V), \nabla\psi) = (a\nabla(V_h - V), \nabla(\psi - \chi))$$
$$\leqslant C\|\nabla(V_h - V)\|\|\nabla(\psi - \chi)\| \leqslant (Ch\|V\|_2)(Ch\|\psi\|_2)$$
$$\leqslant Ch^2\|V\|_2\|\varphi\|,$$

至致引理证完。

由于 $\nabla a(u)=a'(u)\nabla u$，所以在$u$的适当正则性假设下可以推出：

引理 2. 设$\rho=\tilde{u}_h-u$，则有

$$\|\rho\|+h\|\nabla\rho\|\leqslant C(u)h^2.$$

我们还需要关于ρ_t的估计。

引理 3. 设$\rho=\tilde{u}_h-u$，我们有

$$\|\rho_t\|+h\|\nabla\rho_t\|\leqslant c(u)h^2.$$

证明. 我们首先估计梯度。由对微分方程(6)进行微分，我们有

$$(a(u)\nabla\rho_t,\ \nabla\chi)+(a(u)_t\nabla\rho,\ \nabla\chi)=0,\quad \forall\chi\in S_h.$$

因此，

$$\mu\|\nabla\rho_t\|^2\leqslant(a(u)\nabla\rho_t,\nabla\rho_t)=(a(u)\nabla\rho_t,$$
$$\nabla(\chi-u_t))+(a(u)\nabla\rho_t,\nabla(\tilde{u}_{h,t}-\chi))$$
$$=(a(u)\nabla\rho_t,\nabla(\chi-u_t))+(a(u)_t\nabla\rho,\nabla(\chi-\tilde{u}_{h,t}))$$
$$\leqslant C(\|\nabla\rho_t\|\|\nabla\chi-u_t)\|+\|\nabla\rho\|\|\nabla(\chi-\tilde{u}_{h,t})\|),$$

若令$\chi=I_hu_t$，则有

$$\mu\|\nabla\rho_t\|^2\leqslant Ch\|u_t\|_2\|\nabla\rho_t\|+\|\nabla\rho\|(Ch\|u_t\|_2+\|\nabla\rho_t\|)$$
$$\leqslant\mu/2\|\nabla\rho_t\|^2+C(\|\nabla\zeta\|^2+h^2\|u_t\|_2^2).$$

再根据引理 2，便证明了

$$\|\nabla\rho_t\|\leqslant C(u)h.$$

对于L_2估计，我们再次利用引理 1 证明中的对偶论证方法。设ψ是由(9)定义的($a=a(u)$)，则有

$$(\rho_t,\varphi)=(a(u)\nabla\rho_t,\nabla\psi)=(a(u)\nabla\rho_t,\nabla(\psi-\chi))$$
$$+(a(u)_t\nabla\rho,\nabla(\psi-\chi))-(\nabla\rho,a(u)_t\nabla\psi),$$

由选取$\chi=I_h\psi$，并对最后一项应用分部积分公式，我们得到

$$|(\rho_t,\varphi)|\leqslant C(\|\nabla\rho_t\|h\|\psi\|_2+\|\nabla\rho\|h\|\psi\|_2+\|\rho\|\|\psi\|_2),$$

从而，由引理 2 和上面对$\nabla\rho_t$的估计，有

$$|(\rho_t,\varphi)|\leqslant C(u)h^2\|\varphi\|,$$

或者

$$\|\rho_t\|\leqslant C(u)h^2,$$

由此引理得证。

下面，我们还需要$\nabla\tilde{u}_h$的有界性。

引理 4. $\nabla\tilde{u}_h$有与 t 和 h 无关的界，

$$\|\nabla\tilde{u}_h\|\leqslant C(u).$$

证明. 显然有

$$\|\nabla\tilde{u}_h\|_{L_\infty}\leqslant\|\nabla(\tilde{u}_h-I_hu)\|_{L_\infty}+\|\nabla I_hu\|_{L_\infty}.$$

利用逆估计、引理 2 以及对I_hu的已知误差估计，我们有

$$\|\nabla(\tilde{u}_h-I_hu)\|_{L_\infty}\leqslant Ch^{-1}\|\nabla(\tilde{u}_h-I_hu)\|$$

$$\leqslant Ch^{-1}(\|\nabla\rho\|+\|\nabla(I_hu-u)\|)\leqslant c(u).$$

其次，容易看到，

$$\|\nabla I_hu\|_{L_\infty}\leqslant C\|\nabla u\|_{L_\infty},$$

所以，引理的结果成立。

我们现在转向抛物问题的L_2误差估计。

定理 1. 在关于 u 的适当的正则性假设下，对于半离散问题(3)，有误差估计

$$\|u_h(t)-u(t)\|\leqslant C(\|V_h-V\|+h^2),$$

其中$C=C(u)$。

证明. 根据(5)式和引理2，只需估计$\theta=u_h-\tilde{u}_h$。我们有

$$(\theta_t,\chi)+(a(u_h)\nabla\theta,\nabla\chi)$$

$$=(u_{h,t},\chi)+(a(u_h)\nabla u_h,\nabla\chi)-(\tilde{u}_{h,t},\chi)-(a(u_h)\nabla\tilde{u}_h,\nabla\chi)$$

$$=(f(u_h),\chi)-(\rho_t,\chi)-(u_t,\chi)-(a(u)\nabla\tilde{u}_h,\nabla\chi)+$$

$$((a(u)-a(u_h))\nabla\tilde{u}_h,\nabla\chi)$$

$$= (f(u_h),\chi) - (\rho_t,\chi) - (\chi_t,\chi) - (a(u)\nabla u,\nabla\chi)$$
$$+ ((a(u)-a(u_h)))\nabla\tilde{u}_h,\nabla\chi) = (f(u_h)-f(u),\chi)$$
$$+ ((a(u)-a(u_h)))\nabla\tilde{u}_h,\nabla\chi) - (\rho_t,\chi)$$

根据引理4 $\nabla\tilde{u}_h$是有界的，若取$\chi=\theta$，则有

$$1/2\cdot d/dt\|\theta\|^2+\mu\|\nabla\theta\|^2\leqslant c\{\|u_h-u\|(\|\theta\|+\|\nabla\theta\|)$$
$$+\|\rho_t\|\|\theta\|\}$$
$$\leqslant C(\|\theta\|+\|\rho\|+\|\rho_t\|)\|\nabla\theta\|\leqslant\mu\|\nabla\theta\|^2+C(\|\theta\|^2+\|\rho\|^2$$
$$+\|\rho_t\|^2).$$

因此，利用Gronwall引理，可得

$$\|\theta(t)\|^2\leqslant C\|\theta(0)\|_2+\int_0^t(\|\rho\|^2+\|\rho_t\|^2)ds$$

根据引理2和3，这就证明了

$$\|\theta(t)\|\leqslant C(\|V_h-V\|+h^2),$$

从而定理得证。

对于梯度的相应估计，象第二章定理4那样，通过一个逆估计容易得到。我们不作详细的讨论。

我们现在先来对函数a和f的假设(1)和(2)的整体特性作一个注译。从我们的分析中显然可见，只要u_h是靠近u的，这些假设只在u的值域的一个邻域内起作用。所以，对于a和f只作一个严格程度更低的假设是自然的，即假设a和f只在精确解u的上述一个邻域内有定义并且满足条件(1)和(2)。但是，必须记住，靠近性质在这里必须理解为在每一点都成立，或者说u_h逼近u是一致的，

这样，设I_0是u的值域，$I_0=[a,b]=\{u(x,t);\ x\in\bar{\Omega},\ t\in[0,T]\}$，且对固定的$\delta>0$，考虑区间$I_\delta=[a-\delta,\ b+\delta]$。现在假设$f$和$a$在$I_\delta$上有定义并且充分光滑，特别地在$I_\delta$上为Lipschitz连续，其次，假定$a$是正的并有正的下界和有限

的上界。在上述假定下，若V_h充分靠近V，或者说$V_h \in I_{\delta/2}$则问题(3)和(4)有定义并在I_δ内有解存在，此论断至少对某个小区间$[0,t_h](0<t_h\leqslant T)$是成立的。例如，假设所选的$V_h$满足

$$\|V_h-V\|\leqslant C(V)h^2,$$

那么，由通常的逆估计和选χ为V的插值，可得

$$\|V_h-V\|_{L_\infty}\leqslant\|V_h-\chi\|_{L_\infty}+\|\chi-V\|_{L_\infty}$$
$$\leqslant Ch^{-1}\|V_h-\chi\|+\|\chi-V\|_{L_\infty}.$$
$$\leqslant Ch^{-1}\|V_h-V\|+Ch^{-1}\|\chi-V\|+\|\chi-V\|_{L_\infty}\leqslant C(V)h.$$

于是对于充分小的h，$V_h\in I_{\delta/2}$。无论如何，只要$u_h\in I_\delta$，上面的误差分析就是正确的，并可推出

$$\|u_h(t)-u(t)\|\leqslant C(\|V_h-V\|^2+h^2)\leqslant C(u)h^2.$$

这样，对于$t\leqslant t_h$，有

$$\|u_h(t)-u(t)\|_{L_\infty}\leqslant C(u)h<\delta/2,\ 对于h\leqslant h_0,$$

其中h_0与t_h无关。这样一来，$u_h(t_h)\in I_{\delta/2}$，可见在t超过t_h的一个小邻域内解仍然存在。现在，我们结论t_h可以取成T，并且对于a和f所作的局部的假设，当h充分时，对于定理1的证明是足够的。另一方面，这也意味着局部的假设可以延拓为整体地成立，所以假设(1)和(2)并设有限制一般性。

我们现在开始讨论全离散格式。首先考虑向后Euler-Galerkin格式，于此这个格式可以叙述成

$$(10)\quad (\bar{\partial}_t U^n,\chi)+(a(U^n)\nabla U^n,\nabla\chi)=(f(U^n),\chi),$$
$$\chi\in S_h,$$
$$U^0=V_h,$$

其中k是时间步长，U^n是于时刻nk的近似解，$\bar{\partial}_t U^n=k^{-1}(U^n-U^{n-1})$。

通过表示式$U^n=\sum_{i=1}^{N_h}\alpha_i^n\varphi_i$引进向量$\alpha^n$，方程(10)可以用矩阵形式写成，

$$A\frac{\alpha^n-\alpha^{n-1}}{k}=F(\alpha^n),$$

或者

$$A\alpha^n=A\alpha^{n-1}+kF(\alpha^n),$$

α^0 由 V_h 给定，和以前一样，A 是质量矩阵，F 为整体 Lipschitz 连续。显然这个非线性代数方程组对于充分小的 k 是可以求解的，于是对于$nk\leq T$，方程组(10)定义一个唯一的离散解。

我们有如下的误差估计：

定理 2。在适当的正则性假设下，则向后Euler—Galerkin方法对于充分小的k和$C=C(u)$，有误差估计

$$\|U^n-u(nk)\|\leqslant C(\|V_h-V\|+h^2+k).$$

证明. 象以前那样，设$u^n=u(nk)$，并令

(11) $\quad U^n-u^n=(U^n-\widetilde{U}^n)+(\widetilde{U}^n-u^n)=\theta^n+\rho^n,$

其中$\widetilde{U}^n$是u^n的椭圆投影，并且由

(12) $\quad (a(u^n)\nabla(\widetilde{U}^n-u^n),\ \nabla\chi)\equiv(a(u^n)\nabla\rho^n,\ \nabla\chi)=0$

$\forall\chi\in S_h$ 定义。注意，由于这个方程式是和(6)一样的，故引理2,3和4 的估计仍然成立，这样就只剩下估计 θ^n 了。对于$\chi\in S_h$，我们有

$$\begin{aligned}
&(\bar{\partial}_t\theta^n,\chi)+(a(U^n)\nabla\theta^n,\nabla\chi)\\
&=(\bar{\partial}_tU^n,\chi)+(a(U^n)\nabla U^n,\nabla\chi)-(\bar{\partial}_t\widetilde{U}^n,\chi)\\
&\quad-(a(U^n)\nabla\widetilde{U}^n,\nabla\chi)\\
&=(f(U^n),\chi)-(u_t^n,\chi)-(\bar{\partial}_t\widetilde{U}^n-u_t,\chi)\\
&\quad-(a(u^n)\nabla\widetilde{U}^n,\nabla\chi)-((a(U^n)-a(u^n))\nabla\widetilde{U}^n,\nabla\chi)
\end{aligned}$$

利用连续问题的弱形式和对第四项利用(12)式，可得到

$$(\bar{\partial}_t \theta^n, \chi) + (a(U^n)\nabla\theta^n, \nabla\chi)$$
$$= (f(U^n) - f(u^n), \chi) - (\bar{\partial}_t(\tilde{U}^n - u^n), \chi) - (\bar{\partial}_t u^n - u_t^n, \chi)$$
$$-((a(U^n) - a(u^n))\nabla\tilde{U}^n, \nabla\chi)$$

取$\chi = \theta^n$，并且注意到等式

$$(\bar{\partial}_t \theta^n, \theta^n) = \frac{1}{2}\bar{\partial}_t \|\theta^n\|^2 + \frac{k}{2}\|\bar{\partial}_t \theta^n\|^2,$$

由 f 和 a 的Lipschitz连续性以及 a 与 $\nabla\tilde{U}^n$ 的有界性，则推出

$$\frac{1}{2}\bar{\partial}_t\|\theta^n\|^2 + \mu\|\nabla\theta^n\|^2 \leqslant C\|U^n - u^n\|(\|\theta^n\| + \|\nabla\theta^h\|)$$
$$+ (\|\bar{\partial}_t \rho^n\| + \|\bar{\partial}_t n^n - u_t^h\|)\|\theta^n\|,$$

由此得到

$$\bar{\partial}_t\|\theta^n\|^2 \leqslant C(\|\theta^n\|^2 + \|\rho^n\|^2 + \|\bar{\partial}_t \rho^n\|^2 + \|\bar{\partial}_t u^n - u_t^n\|^2)$$
$$= C(\|\theta^n\|^2 + R_n),$$

其中R_n由后面的等号定义。这样我们得到

$$(1 - ck)\|\theta^n\|^2 \leqslant \|\theta^{h-1}\|^2 + CkR^n,$$

或者，对于充分小的k，

$$\|\theta^n\|^2 \leqslant (1 + Ck)\|\theta^{n-1}\|^2 + CkR_n,$$

重复地应用这个不等式，便得到

$$(13) \qquad \|\theta^n\|^2 \leqslant (1 + Ck)^n\|\theta^0\|^2 + Ck\sum_{i=1}^{n}(1 + Ck)^{n-i}R_i$$

$$\leqslant C\|\theta^0\|^2 + Ck\sum_{i=1}^{n}R_i.$$

由引理 2，有

$$\|\theta^0\| = \|V_h - \tilde{U}^0\| \leqslant \|V_h - V\| + \|\tilde{U}^0 - V\| \leqslant \|V_h - V\| +$$
$$Ch^3\|V\|^3,$$

和

$$\|\rho^j\| = \|\tilde{U}_j - u^j\| \leqslant Ch^2 \|n(jk)\|_2 \leqslant C(u)h^2,$$

又由引理 3，

$$\|\bar{\partial}_t \rho^j\| = \|k^{-1} \int_{(j-1)k}^{jk} \rho_t ds\| \leqslant C(u)h^2.$$

最后（参见第一章定理 3 证明中w_1^j的估计式），因为

$$\|\bar{\partial}_t u^j - u_t^j\| = \|k^{-1} \int_{(j-1)k}^{jk} (s-(j-1)k)u_{tt}(s)ds\| \leqslant C(u)k,$$

从而有

$$R_j \leqslant C(u)(h^2+k)^2,$$

这样，由(13)式得到

$$\|\theta^n\| \leqslant C(\|V_h - V\| + h^2 + k),$$

至此定理得证。

上面的方法有一个缺点，这就是，由于在方程组(10)里出现 $a(U^n)$和$f(U^n)$，所以每一时间步必须解一个非线性代数方程组。因此，我们现在来考虑这个方法的一个线性化修正，即通过用U^{n-1}替代 a 和 f 中的U^n 来克服上述困难，于是我们有

$$(14)\quad (\bar{\partial}_t U^n, \chi) + (a(U^{n-1})\nabla U^n, \nabla \chi) = (f(U^{n-1}), \chi), \quad \forall \chi \in S_h.$$

假设A和以前一样，$B(\alpha)$是以$(a(\sum_l \alpha_l \varphi_l)\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_k)$ 为元素的正定矩阵，则此方程组可以写成如下形式：

$$A\frac{\alpha^n - \alpha^{n-1}}{k} + B(\alpha^{n-1})\alpha^n = F(\alpha^{n-1}),$$

或者

$$(A + kB(\alpha^{n-1}))\alpha^n = A\alpha^{n-1} + kF(\alpha^{n-1}),$$

这个方程组关于α^n总是可解的。

我们现在来证明定理 2 的结果对于这个线性化问题仍然正确。

定理 3. 对于线性化的向后 Euler—Galerkin 方法(14)，当 k 充分小时，有误差估计

$$\|U^n-u(k)\|\leqslant c(\|V_h-V\|+h^2+k),$$

其中 $c=c(u)$ 与 k 和 h 无关。

证明。 我们仍将误差写成(11)的形式，并且只需对θ^n的估计作一些修改。类似于上面，我们有

$$\begin{aligned}&(\bar\partial_t\theta^n,\chi)+(a(U^{n-1})\nabla\theta^n,\ \nabla\chi)\\=&(f(U^{n-1})-f(n^n),\chi)-((a(U^{n-1})-a(n^n))\nabla\tilde U^n,\nabla\chi)\\&-(\bar\partial_t(\tilde U^n-n^n),\chi)-(\bar\partial_t u^n-u_t^n,\chi).\end{aligned}$$

这时我们有

$$\begin{aligned}\|(f(U^{n-1})-f(u^n)\|&\leqslant C\|U^{n-1}-u^n\|\leqslant C(\|U^{n-1}\\&-u^{n-1}\|+\|u^{n-1}-u^n\|)\\&\leqslant C(\|\theta^{n-1}\|+\|\rho^{n-1}\|+k\|\bar\partial_t u^n\|),\end{aligned}$$

并用类似的方法估计关于$a(\cdot)$的项，那么，由取 $\chi=\theta^n$，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\bar\partial_t\|\theta^n\|^2+\mu\|\nabla\theta^n\|\\\leqslant&c(\|\theta^{n-1}\|+\|\rho^{n-1}\|+k\|\bar\partial_t u^n\|)(\|\theta^n\|+\|\nabla\theta^n\|)\\&+(\|\bar\partial_t\rho^n\|+\|\bar\partial_t u^n-u_t^n\|)\|\theta^n\|\\\leqslant&c(\|\theta^{n-1}\|+\|\rho^{n-1}\|+k\|\bar\partial_t u^n\|+\|\bar\partial_t\rho_t\|+\\&+\|\bar\partial_t u^n-u_t^n\|)\|\nabla\theta^n\|,\end{aligned}$$

象以前那样讨论，可以证明

$$\begin{aligned}\bar\partial_t\|\theta_n\|^2\leqslant&c(\|\theta^{n-1}\|^2+\|\rho^{n-1}\|^2+k^2\|\bar\partial_t u^n\|^2\\&+\|\bar\partial_t\rho^n\|^2+\|\bar\partial_t u^n-u_t^n\|^2)\\\leqslant&c(\|\theta^{n-1}\|^2+(h^2+k)^2).\end{aligned}$$

由此得出

$$\|\theta^n\|^2\leqslant(1+ck)\|\theta^{n-1}\|^2+ck(h^2+k)^2,$$

反复地应用这个不等式，得到

$$\|\theta^n\|^2 \leqslant C\|\theta^0\|^2 + C(h^2+k)^2,$$

于是有

$$\|\theta^n\| \leqslant C(\|V_h - V\| + h^2 + k)。$$

这就完成了定理的证明。

为了在时间方向上得到高一些的精确度，我们考虑 Crank—Nicolson—Galerkin格式，或者说，考虑格式

$$(15)\quad (\bar{\partial}_t U^n, \chi) + (a(\bar{U}^n)\nabla\bar{U}^n, \nabla\chi) = (f(\bar{U}^n), \chi), \quad \forall \chi \in S_h,$$

$$U^0 = V_h,$$

其中$\bar{U}^n = \frac{1}{2}(U^n + U^{n-1})$。这个方程关于点$t = (n-1/2)k$是对称的，所以人们可以期望在时间方向上有二阶精确度。然而，它和上面讨论的向后 Euler 方法一样，也存在着在每一时间层产生一个非线性方程组的缺点。为了克服这个困难，我们也将考虑它的一个线性化修正。在这个修正方法中，a和f的自变量是由U^{n-1}和U^{n-2}作外推得到的，或者更确切地说，修正方法为

$$(16)\quad (\bar{\partial}_t U^n, \chi) + (a(\hat{U}^n)\nabla\bar{U}^n, \nabla\chi) = (f(\hat{U}^n), \chi),$$

$\forall \chi \in S_h$，$n \geqslant 2$，其中 $\hat{U}^n = 3/2U^{n-1} - 1/2U^{n-2}$。象向后Euler格式那样，非线性方程(15)对于充分小的k，关于U^n是可解的。而线性化方程(16)，当U^{n-1}和U^{n-2}给定时，关于U^n总是可解的。

注意，如果象在向后Euler格式中所作的那样，选取a和f在U^{n-1}处的值，得到的格式将不是令人满意的，因为，这样做达不到必需的精确度。而由于

$$(17)\quad \hat{U}^n = 3/2u^{n-1} - 1/2u^{n-2} = u^{n-1/2} + O(k^2), \text{当} k \to 0$$

时，所以这种选取恰好满足了我们所要求的精确度。

我们还要注意到，由于现在的方程中包含有U^{n-2}，所以它只能应用于$n\geqslant 2$情形。所以，我们必须用另外的方法补充确定U^1. 我们将在后面讨论这个问题。

我们现在给出对于基本的Crank—Nicolson—Galerkin方法的误差估计。为此还需要另外的辅助估计：

引理 5. 假设u有适当的正则性质，则对于由(6)定义的椭圆投影$\tilde{u}_h$，有

$$\|\nabla\tilde{u}_{h,tt}\|\leqslant C(u).$$

证明。 将(6)关于t微分两次，得到

$$(a(u)\nabla\tilde{u}_{h,tt},\nabla\chi)=(a(u)\nabla u_{tt},\nabla\chi)$$
$$-2(a(u)_t\nabla\rho_t,\nabla\chi)-(a(u)_{tt}\nabla\rho,\nabla\chi),$$

取$\chi=\tilde{u}_{h,tt}$,则有

$$\mu\|\nabla\tilde{u}_{h,tt}\|^2\leqslant C(u)(\|\nabla u_{tt}\|+\|\nabla\rho_t\|+\|\nabla\rho\|)\|\nabla u_{h,tt}\|,$$

由此，根据引理 2 和 3，便得到本引理。

我们现在可以证明如下的误差估计：

定理 4. 对于Crank—Nicolson—Galerkin方法

(15)，当k充分小时，有误差估计

$$\|U^n-u(nk)\|\leqslant C(\|V_h-V\|+h^2+k^2),$$

其中$C=C(u)$与k和h无关。

证明。 象通常那样，由引理 2 有

$$\|\rho^n\|\leqslant C(u)h^2.$$

这样只剩下估计θ^n了。这里我们有

$$(18)\quad (\bar{\partial}_t\theta^n,\ \chi)+(a(\bar{U}^n)\nabla\bar{\theta}^n,\nabla\chi)$$
$$=(\bar{\partial}_t U^n,\chi)+(a(\bar{U}^n)\nabla\bar{U}^n,\nabla\chi)-(\bar{\partial}_t\tilde{U}^n\chi)$$
$$-(a(\bar{U}^n)\nabla\bar{\tilde{U}}^n,\nabla\chi)$$
$$=(f(\bar{U}^n),\chi)-(u_t^{n-1/2},\chi)-(\bar{\partial}_t\tilde{U}^n-u_t^{n-1/2},\chi)$$

$$
\begin{aligned}
&-(a(u^{n-1/2})\nabla\widetilde{U}^{n-1/2},\nabla\chi)-(a(\bar{U}^{n})\nabla\bar{\widetilde{U}}^{n}\\
&-a(u^{n-1/2})\nabla\widetilde{U}^{n-1/2},\nabla\chi)\\
=&(f(\bar{U}^{n})-f(u^{n-1/2}),\chi)-(\bar{\partial}_{t}\widetilde{U}^{n}-u_{t}^{n-1/2},\chi)\\
&-((a(\bar{U}^{n})-a(u^{n-1/2}))\nabla\bar{\widetilde{U}}^{n}+a(u^{n-1/2})\nabla(\bar{\widetilde{U}}^{n}\\
&-\widetilde{U}^{n-1/2}),\nabla\chi)。
\end{aligned}
$$

令$\chi=\bar{\theta}^{n}$，并且注意

$$
(\bar{\partial}_{t}\theta^{n},\bar{\theta}^{n})=1/2\bar{\partial}_{t}\|\theta^{n}\|^{2},
$$

则得到

$$
\begin{aligned}
&1/2\bar{\partial}_{t}\|\theta^{n}\|^{2}+\mu\|\nabla\bar{\theta}^{n}\|^{2}\\
\leqslant&C(\|\bar{U}\tilde{u}-u^{n-1/2}\|+\|\bar{\partial}_{t}\widetilde{U}^{n}-u_{t}^{n-1/2}\|+\|\nabla(\bar{\widetilde{U}}^{n}-\\
&\widetilde{U}^{n-1/2})\|)\|\nabla\bar{\theta}^{n}\|,
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
(19)\quad &\bar{\partial}_{t}\|\theta^{n}\|^{2}\leqslant c(\|\bar{U}^{n}-u^{n-1/2}\|^{2}+\|\bar{\partial}_{t}\widetilde{U}^{n}-u_{t}^{n-1/2}\|^{2}\\
&+\|\nabla(\bar{\widetilde{U}}^{n}-\bar{U}^{n-1/2})\|^{2})。
\end{aligned}
$$

这里

$$
\|\bar{U}^{n}-u^{n-1/2}\|\leqslant\|\bar{\theta}^{n}\|+\|\bar{\rho}^{n}\|+\|\bar{u}^{n}-u^{n-1/2}\|,
$$

由引理2，其中

$$
\|\bar{\rho}^{n}\|\leqslant 1/2(\|\rho^{n}\|+\|\rho^{n-1}\|)\leqslant C(u)h^{2},
$$

而且有

$$
\|\bar{u}^{n}-u^{n-1/2}\|\leqslant Ck\int_{(n-1)k}^{nk}\|u_{tt}\|ds\leqslant C(u)k^{2}。
$$

类似地，利用引理3，可得到

$$
\begin{aligned}
\|\bar{\partial}_{t}\widetilde{U}^{n}-u_{t}^{n-1/2}\|&\leqslant\|\bar{\partial}_{t}\rho^{n}\|+\|\bar{\partial}_{t}u^{n}-u^{n-1/2}\|\\
&\|\leqslant C(u)(h^{2}+k^{2}),
\end{aligned}
$$

又由引理5，

$$
\|\nabla(\bar{\widetilde{U}}^{n}-\widetilde{U}^{n-1/2})\|\leqslant Ck\int_{(n-1)k}^{nk}\|\nabla\tilde{u}_{htt}\|ds\leqslant C(u)k^{2}。
$$

综合以上估计，便证明了，

$$\bar{\partial}_t\|\theta^n\|^2 \leqslant C\|\theta^n\|^2 + C(h^2+k^2)^2,$$

或者

$$(1-Ck)\|\theta^n\|^2 \leqslant (1+Ck)\|\theta^{n-1}\|^2 + Ck(h^2+k^2)^2,$$

由此，对充分小的 k，有

$$\|\theta^n\|^2 \leqslant C\|\theta^0\|^2 + Cnk(h^2+k^2)^2,$$

或者

$$\|\theta^n\| \leqslant C(\|V_h - V\| + h^2 + k^2),$$

这样就完成了定理的证明。

我们现在把注意力转向线性化的 Crank—Nicolson—Galerkin 方法。象我们前面指出的那样，这个方法要求用另外的方法单独计算 U^1。为此，这里我们分析一个预估校正方法。利用$n=1$情形的方程(16)，并且用U^0代替 $\hat{U}^1$，由此确定的解 $U^{1,0}$ 作为第一步近似值，然后用 $1/2(U^{1,0}+U^0)$代替$\hat{U}^1$，由 $n=1$的方程(16)求得的结果作为U^1。于是，我们开始的程序是

$$U^0 = V^h,$$

然后按下述式子计算$U^{1,0}$ 和 U^1

$$(20)\quad k^{-1}(U^{1,0}-U^0,\chi)+(a(U^0)\nabla(1/2(U^{1,0}+U^0)),\nabla\chi)=(f(U^0),\chi),\ \forall\chi\in S_h,$$

$$(21)\quad (\bar{\partial}_t U^1,\chi)+(a(1/2(U^{1,0}+U^0))\nabla\bar{U}^1,\ \nabla\chi)=(f(1/2(U^{1,0}+U^0)),\ \chi),\ \forall\chi\in S_h.$$

求出U^1。对于这个方法，我们将证明如下结果：

定理 5. 在适当的正则性假设下，对于所述的线性化 Crank—Nicolson—Galerkin 方法，当k充分小时，有误差估计

$$\|U^n - u(nk)\| \leqslant C(\|V_h - V\| + h^2 + k^2),$$

其中$C=C(u)$不依赖于k和h。

证明。 于此，对于$n\geqslant 2$，替代(18)式我们有

$$(\bar{\partial}_t\theta^n,\chi)+(a(\hat{U}^n)\nabla\bar{\theta}^n,\nabla\chi)$$
$$=(f(\hat{U}^n)-f(u^{n-1/2}),\chi)-(\bar{\partial}_t\tilde{U}^n-u_t^{n-1/2},\chi)$$
$$-((a(\hat{U}^n)-a(u^{n-1/2}))\nabla\bar{\tilde{U}}^n+a(u^{n-1/2})\nabla(\bar{\tilde{U}}^n-\tilde{U}^{n-1/2}),\nabla\chi),$$

于是代替(19)式的是

$$\bar{\partial}_t\|\theta^n\|^2\leqslant C\|\hat{U}^n-u^{n-1/2}\|^2+\|\bar{\partial}_t\tilde{U}^n-u_t^{n-1/2}\|^2+\|\nabla(\bar{\tilde{U}}^n-\tilde{U}^{n-1/2}\|^2).$$

这里，利用定义和(17)式，有

$$\|\hat{U}^n-u^{-1/2}\|\leqslant\|\hat{\theta}^n\|+\|\hat{\rho}^n\|+\|\hat{u}^n-u^{n-1/2}\|$$
$$\leqslant C(\|\theta^{n-1}\|+\|\theta^{n-2}\|+h^2+k^2),$$

这样，我们得到

$$\|\theta^n\|^2\leqslant(1+Ck)\|\theta^{n-1}\|^2+Ck\|\theta^{n-2}\|^2+Ck(h^2+k^2)^2\quad,$$

或者

$$\|\theta^3\|^2+Ck\|\theta^{n-1}\|^2\leqslant(1+2Ck)(\|\theta^{n-1}\|^2+Ck\|\theta^{n-2}\|^2)+Ck(h^2+k^2)^2.$$

由此证明了对于$nk\leqslant T$，有

(22) $\quad\|\theta^1\|^2\leqslant C(\|\theta^1\|^2+k\|\theta^0\|^2+(h^2+k^2)^2).$

现在利用方程(20)和(21)来估计$\|\theta^1\|$。令$\theta^{1,0}=U^{1,0}\tilde{U}^1$，$\theta^{0,0}=\theta^0$，按同前面一样的方法，由方程(20)，替代(19)式我们得到

$$\bar{\partial}_t\|\theta^{1,0}\|^2\leqslant C(\|U^0-u^{1/2}\|^2+(h^2+k^2)^2).$$

由于

$$\|U^0-u^{1/2}\|\leqslant\|\theta^0\|+\|\rho^0\|+\|u^0-u^{1/2}\|$$
$$\leqslant\|\theta^0\|+C(h^2+k),$$

这表明

$$\bar{\partial}_t\|\theta^{1,0}\|^2\leqslant C(\|\theta^0\|^2+h^4+k^2),$$

从而有

$$\|\theta^{1,0}\|^2 \leqslant (1+Ck)\|\theta^0\|^2 + Ck(h^4+k^3)$$
$$\leqslant C(\|\theta^0\|^2 + h^4 + k^3).$$

现在我们应用方程(21)，这时替代(19)式我们得到

$$(23)\quad \bar{\partial}_t \|\theta^1\|^2 \leqslant C(\|1/2(U^{1,0}+U^0) - u^{1/2}\|^2 + (h^2+k^2)^2).$$

这里，由上面的估计，有

$$\|1/2(U^{1,0}+U^0) - u^{1/2}\| \leqslant \|1/2(\theta^{1,0}+\theta^0)\| + \|\tilde{U}^1 - u^{1/2}\|$$
$$\leqslant 1/2(\|\theta^{1,0}\| + \|\theta^0\|) + C(k^2+h^2)$$
$$\leqslant C\|\theta^0\| + C(h^2 + k^{3/2}),$$

因此，由(23)可得

$$\|\theta^1\|^2 \leqslant (1+Ck)\|\theta^0\|^2 + Ck(h^4+k^3)$$
$$\leqslant C(\|\theta^0\|^2 + (h^2+k^2)^2).$$

这与前边的估计式(22)结合一起，便得

$$\|\theta^n\| \leqslant C(\|\theta^0\| + h^2 + k^2) \leqslant C(\|V_h - V\| + h^2 + k^2).$$

由此定理得证。

参考文献。

这一章的资料已经包含在第一章所列的文章〔1〕和〔2〕中。对于有关的最近期的工作，可参看〔3〕，〔4〕和〔5〕。对剖分不作拟一致假设并且 $f(u)$ 具有各种增长条件的半线性 $(a(u)\equiv 1)$ 情形的一个误差分析，见〔6〕。

1. J. Douglas, Jr. and T. Dupont, Galerkin methods for parabolic equations, SIAM J. Numer. Anal. 7, 575—626 (1970).

2. M. F. Wheeler, A priori L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differe-

ntial equations, SIAM J. Numer. Anal. 10,723—759 (1973).

3. J. Douglas, Jr., Effective time—stepping methods for the numerical solution of nonlinear parabolic problems. Mathematics of Finite Elements and Applications, Ⅲ (Proc. Third MAFELAP Conf., Brunel Univ., Uxbridge, 1978), PP. 289—304. Academic Press, London (1979).

4. M. Luskin, A Galerkin method for nonlinear parabolic equations with nonlinear boundery conditions. SIAM J. Numer. Anal. 16, 284—299 (1979).

5. H. H. Rachford, Jr., Two—level discrete—time Galerkin approximations for second order nonlinear parabolic partial differential equations, SIAM J. Numer. Anal. 10, 1010—1026 (1973).

6. V. Thomée and L. B. Wahlbin, On Galerkin methods in semilinear parabolic problems. SIAM J. Numer. Anal. 12, 378—389 (1975).

第十一章　质量集中法

在这一章里，我们将讨论使用分片线性试探函数的标准Galerkin法的一种变体，即所谓的质量集中法。

考虑简单的初边值问题

$u_t - \Delta u = f$,　　于$\Omega x[0,\infty]$内，

$u = 0$,　　在$\partial\Omega x[0,\infty]$上，

$u(\cdot,0) = V$　　于Ω内，

为简单计，其中Ω仍假定是平面上的一个凸的光滑区域。

设$S_h C H_0^1(\Omega)$由在Ω的拟一致三角剖分$\mathscr{T}_h=\{\tau\}$上连续的分片线性函数所组成，$\mathscr{T}_h$的边界顶点全部落在$\partial\Omega$上，且S_h的函数在由$\mathscr{T}_h$所确定的多边形区域Ω_h以外的地方为零。用$\{P_j\}_1^{N_h}$表示$\mathscr{T}_h$的内部顶点集合，并令$\{\varphi_j\}_1^{N_h}$是S_h的标准基底，它是由$\varphi_j(P_k)=\delta_{jk}$所定义的棱锥函数组成的。回忆标准Galerkin法是求n_h:$[0,\infty]\to S_h$使得

(1)　$(u_{h,t},\chi)+(\nabla u_h,\nabla\chi)=(f,\chi),\forall\chi\in S_h, t\geqslant 0,$

$u_h(0)=V_h,$

其中V_h是V在S_h中的某种近似。又知此方法可以写成如下矩阵形式

(2)　$A\alpha^1(t)+B\alpha(t)=\tilde{f}$,　对于$t\geqslant 0$,

$\alpha(o)=\gamma$,

其中$A=(a_{jk})$和$B=(b_{jk})$分别是元素为$a_{jk}=(\varphi_j,\varphi_k)$和$b_{jk}=(\Delta\varphi_j,\nabla\varphi_k)$的质量矩阵和刚度矩阵，$\alpha_j(t)$和$\gamma_j$是$u_h(t)$和$V_h$关于$\{\varphi_j\}_1^{N_h}$的系数，而$\tilde{f}$是分量为$(f,\varphi_K)$的向量。

定义质量集中法的一个简单方法，是将（2）中的质量矩

阵A代之以对角矩阵$\bar{A}$，它以下列数

$$\bar{a}_{jj}=\sum_{k=1}^{N_h}a_{jk},\qquad j=1,2,\cdots,N_h,$$

为其对角元素。这相当于将每一行的质量集中到对角线的位置，从而使得求$\alpha^1(t)$的系数矩阵的逆变为很简单了。

为此，讨论矩阵问题

$$\text{(3)}\qquad \bar{A}\alpha^1(t)+B\alpha(t)=\tilde{f}(t),\qquad t\geqslant 0,$$
$$\alpha(0)=\gamma.$$

我们将给这个方法另外两种解释，然后利用其中的第一种解释导出此方法的误差估计。

第一种解释是把(3)视作为用数值积分近似(1)中第一项得到的。令τ是剖分$\mathscr{T}_h$中的一个三角形，其顶点为$P_{\tau,j}$，$j=1,2,3$，并考虑求积分式

$$\text{(4)}\quad Q_{\tau,h}(f)=\frac{1}{3}\tau\text{的面积}\sum_{j=1}^{3}f(P_{\tau,j})\approx\int_\tau f dx.$$

利用这个求积公式，我们可以定义S_h中内积的一个近似

$$(\psi,\chi)_h=\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}Q_{\tau,h}(\psi\chi).$$

现在我们断言：由(3)所定义的质量集中法等价于

$$\text{(5)}\quad (u_{h,t},\chi)_h+(\nabla u_h,\nabla\chi)=(f,\chi),\quad \forall\chi\in S_h,$$
$$u_h(0)=V_h.$$

事实上，令$u_h(t)=\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j(t)\varphi_j(t)$，则此方程组可以写成

$$\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j^1(t)(\varphi_j,\varphi_k)_h+\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j(t)(\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_k)=(f,\varphi_k),$$
$$k=1,\cdots,N_h.$$

为了证明上述等价性，只需注意明显的事实

$$(\varphi_j,\varphi_k)_h=0,\qquad 当 j\neq k 时,$$

（这是由于φ_j，φ_k在$\mathcal{T}_h$的所有顶点上为零），和证明

$$(6)\quad \|\varphi_j\|_h^2=(\varphi_j,\varphi_j)_h=\sum_{k=1}^{N_h}(\varphi_j,\varphi_k).$$

为了证明(6)，注意对于$j\neq k$，仅当P_j和P_k相邻时(φ_j,φ_k)不为零，并注意若τ是以P_j和P_k为顶点的一个三角形，由简单计算（例如将τ变换为一个参考三角形）可知

$$\int_\tau \varphi_j\varphi_k dx=\frac{1}{12}\tau 的面积$$

和

$$\int_\tau \varphi_j^2 dx=\frac{1}{6}\tau 的面积.$$

由于对每一对P_j，P_k，存在两个这样的三角形τ.所以若用D_j表示所有以P_j为其一个顶点的三角形之并集，则有

$$\sum_{k\neq j}(\varphi_j,\varphi_k)=\frac{1}{6}D_j 的面积,$$

和

$$\|\varphi_j\|^2=\frac{1}{6}D_j 的面积,$$

从而

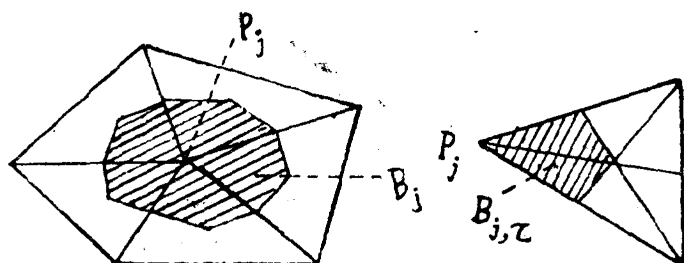
$$\sum_{j=1}^{N_h}(\varphi_j,\varphi_k)=\frac{1}{3}D_j 的面积.$$

其次，显然地，

$$\|\varphi_j\|_h^2=\sum_\tau Q_{\tau,h}(\varphi_j^2)=\frac{1}{3}D_j 的面积,$$

这就完成了(6)的证明。

现在转向所述方法的另一种陈述。再令τ是剖分中的一个三角形，P_j是它的顶点之一，作连接τ的每个顶点与其对边中点的直线。这些直线交于τ的重心并将τ划分为六个等面积的三角形。设$B_{j,\tau}$是它们中以P_j为顶点的那两个三角形的并集，则$B_{j,\tau}$的面积是τ的面积的三分之一。对于每个内点P_j，令B_j是那样一些$B_{j,\tau}$的并集，其中τ以P_j为一顶点。



现在用$\bar{S}_h$代表所有在每个B_j内为常数而在B_j的并集之外为零的函数作成的集合。注意，$\bar{S}_h$的元素χ由其在顶点P_j上的值唯一地确定，并可写成

$$\chi(x)=\sum_{j=1}^{N_h}\chi(P_j)\tilde{\varphi}_j(x),$$

其中函数$\tilde{\varphi}_j$在B_j上等于1，而在其余地方是零。因为S_h中的函数也是由其在顶点P_j上的值唯一确定的，故在S_h与$\bar{S}_h$的函数之间存在一个1—1对应关系。用$\bar{\chi}$代表S_h中函数χ在$\bar{S}_h$中的对应的函数，χ在顶点P_j处与$\bar{\chi}$等值。

借助上述记号，半离散问题(3)或者(5)又可表示成

$$(\bar{u}_{h,t},\bar{\chi})+(\nabla u_h,\nabla\chi)=(f,\chi)\quad\forall\in\chi,S_h.$$

事实上，若注意到明显地事实

$$(\widetilde{\varphi}_j,\widetilde{\varphi}_k)=0,\qquad 当j\neq k时,$$

以及等式

$$\|\overline{\varphi}_j\|^2=B_j的面积=\frac{1}{3}D_j的面积=\|\widetilde{\varphi}_j\|_h^2.$$

类似于前面，即知上式成立。

后面的这个陈述，可以看成是由降低S_h内函数的H^1—正则性要求而得到的。这种正则性要求单就使内积有意义这点来说，是不需要的。此陈述方法引自〔1〕和〔2〕。

现在利用陈述(5)来进行误差分析。引进求积误差

$$\varepsilon_h(v,w)=(v,w)_h-(v,w)$$

并证明如下结果

引理1．设ψ，$\chi\in S_h$,则有

$$|\varepsilon_h(\psi,\chi)|\leqslant ch^2\|\nabla\psi\|\cdot\|\nabla\chi\|.$$

证明。注意到，对线性函数f求积公式(4)是精确的。因此，通过τ到固定参考三角形τ_0的变换，以及利用Bramble－Hilbert引理和Sobolev不等式$\|f\|_{L_\infty(\tau_0)}\leqslant c\|f\|_{W_1^2(\tau_0)}$我们有

$$|Q_{\tau,h}(f)-\int_\tau f\,dx|\leqslant ch^2\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha f\|_{L_1(\tau)}.$$

因为ψ和χ在τ内皆为线性函数，故将上述不等式应用于$f=\psi\chi$时得到

$$|Q_{\tau,h}(\psi\chi)-\int_\tau\psi\chi\,dx|\leqslant ch^2\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha(\psi\chi)\|_{L_1(\tau)}$$

$$\leqslant ch^2\|\nabla\psi\|_{L_2(\tau)}\|\nabla\chi\|_{L_2(\tau)}.$$

从而，由Cauchy－Schwarv不等式，我们推出

$$|\varepsilon_h(\psi,\chi)| \leqslant Ch^2 \sum_{\tau \in \mathscr{T}_h} \|\nabla\psi\|_{L_2(\tau)} \|\nabla\chi\|_{L_2(\tau)}$$
$$\leqslant Ch^2 \|\nabla\psi\| \cdot \|\nabla\chi\|,$$

这就是要证的估计。

现在来证明如下误差估计：

定理 1. 对于质量集中法(5)，当$t \geqslant 0$时，有

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leqslant C\|V_h - V\| + Ch^2\left\{\|V\|_2 + \|u(t)\|_2 + \left(\int_0^t \|u_t\|_2^2 ds\right)^{1/2}\right\}.$$

证明。 利用标准椭圆投影算子P_1，将误差写成

$$u_h - u = (u_h - P_1 u) + (P_1 u - u) = \theta + \rho.$$

如同以前

$$\|\rho(t)\| = \|P_1 u(t) - u(t)\| \leqslant Ch^2 \|u(t)\|_2.$$

为了估计θ，建立

$$\begin{aligned}(7)\quad & (\theta_t, \chi)_h + (\nabla\theta, \nabla\chi) \\ & = (u_{h,t}, \chi)_h + (\nabla u_h, \nabla\chi) - (P_1 u_t, \chi)_h - (\nabla P_1 u, \nabla\chi) \\ & = (f, \chi) - (P_1 u_t, \chi)_h - (\nabla u, \nabla\chi) \\ & = (u_t, \chi) - (P_1 u_t, \chi)_h \\ & = -(\rho_t, \chi) - \varepsilon_h(P_1 u_t, \chi).\end{aligned}$$

取$\chi = \theta$，我们得到

$$(8)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_h^2 + \|\nabla\theta\|^2 = -(\rho_t, \theta) - \varepsilon_h(P_1 u_t, \theta).$$

这里，立即可知

$$|(\rho_t, \theta)| \leqslant \|u_t - P_1 u_t\| \|\theta\| \leqslant Ch^2 \|u_t\|_2 \|\theta\|$$
$$\leqslant Ch^2 \|u_t\|_2 \|\nabla\theta\|,$$

和由引理 1，

$$|\varepsilon_h(P_1 u_t, \theta)| \leqslant Ch^2 \|\nabla P_1 u_t\| \|\nabla\theta\|$$

$$\leqslant Ch^2\|\nabla u_t\|\|\nabla\theta\|\leqslant ch^2\|u_t\|_2\|\nabla\theta\|。$$

从而，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_h^2+\|\nabla\theta\|^2\leqslant ch^2\|u_t\|_2\|\nabla\theta\|\leqslant\|\nabla\theta\|^2+ch^4\|u_t\|_2^2,$$

或

$$\frac{d}{dt}\|\theta\|_h^2\leqslant ch^4\|u_t\|_2^2,$$

由此可得

$$\|\theta(t)\|_h^2\leqslant\|\theta(0)\|_h^2+ch^4\int_0^t\|u_t\|_2^2ds$$

现在，注意到在 S_h 上 $\|\cdot\|_h$ 与 $\|\cdot\|$ 是关于 h 一致等价的模，这可由考虑每一单个三角形加以证明，因此

$$\|\theta(t)\|\leqslant c\|\theta(0)\|+ch^2\left(\int_0^t\|u_t\|_2^2ds\right)^{1/2},$$

其中

$$\|\theta(0)\|=\|V_h-P_1V\|\leqslant\|V_h-V\|+ch^2\|V\|_2。$$

这样得到了对于 $\theta(t)$ 的预想估计，定理证完。

再来讨论梯度的估计。

定理 2。对于半离散问题(5)，当 $t\geqslant 0$ 时，有

$$\|\nabla u_h(t)-\nabla u(t)\|\leqslant\|\nabla V_h-\nabla V\|+Ch\{\|V\|_2+\|u(t)\|_2+\left(\int_0^t\|\nabla u_t\|^2ds\right)^{1/2}\}.$$

证明。在 θ 的方程(7)中取 $\chi=\theta_t$，得

$$(9)\quad \|\theta_t\|_h^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|^2=-(\rho_t,\theta_t)-\varepsilon_h(P_1u_t,\theta_t)。$$

类似于定理 1 的证明，有

$$|(\rho_t,\theta_t)|\leqslant\|u_t-P_1u_t\|\|\theta_t\|\leqslant Ch\|\nabla u_t\|\|\theta_t\|,$$

其次，由引理 1，

$$|\varepsilon_h(P_1u_t,\theta_t)|\leqslant Ch^2\|\nabla P_1u_t\|\|\nabla\theta_t\|$$
$$\leqslant Ch^2\|\nabla u_t\|\|\nabla\theta_t\|\leqslant Ch\|\nabla u_t\|\|\theta_t\|,$$

这里最后一步用到逆不等式

$$\|\nabla\chi\|\leqslant Ch^{-1}\|\chi\|,\qquad \forall\chi\in S_h.$$

（通过引理 1 作稍许变形可以避免用逆不等式）又由模$\|\cdot\|_h$和$\|\cdot\|$在S_h上的等价性，我们得到

$$\|\theta_t\|_h^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|^2\leqslant Ch\|\nabla u_t\|\|\theta_t\|_h\leqslant\|\theta_t\|_h^2$$
$$+Ch^2\|\nabla u_t\|^2,$$

故有

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|^2\leqslant Ch^2\|\nabla u_t\|^2$$

或

$$\|\nabla\theta(t)\|\leqslant\|\nabla\theta(0)\|+Ch\left(\int_0^t\|\nabla u_t\|^2ds\right)^{1/2}$$
$$\leqslant\|\nabla(V_h-V)\|+Ch\left\{\|V\|_2+\left(\int_0^t\|\nabla u_t\|^2ds\right)^{1/2}\right\}.$$

这与标准估计

$$\|\nabla\rho(t)\|\leqslant Ch\|u(t)\|_2$$

结合起来即完成定理的证明。

这个证明并未直接给出对于$\nabla\theta$的阶为$O(h^2)$的超收敛估计。已知对于标准 Galerkin 法此估计是成立的。然而，正如下面引理所示，将上述证明稍微地修改一下，即可证明这样的结果。

引理 2. 对每个$t^*>0$，存在一个常数$C=C(t^*)$，使得对于$\theta=u_h-P_1u$和$0\leqslant t\leqslant t^*$估计式

$$\|\nabla\theta(t)\|\leqslant\|\nabla\theta(0)\|+Ch^2\{\|u_t(t)\|_1+$$

$$\left(\int_0^t (\|u_t\|_2^2 + \|u_{tt}\|_1^2)ds\right)^{1/2}\}$$

成立。

证明。只需考虑$V_h = P_1 V$，即$\theta(0) = 0$的情形。因为齐次方程以$\tilde{u}_h(0) = V_h - P_1 V = \theta(0)$为初值的解$\tilde{u}_h$满足

$$\|\tilde{u}_{h,t}\|_1^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \tilde{u}_h\|^2 = 0,$$

所以，

$$\|\nabla \tilde{u}_h(t)\|^2 \leqslant \|\nabla \tilde{u}_h(0)\|^2 = \|\nabla \theta(0)\|^2.$$

如同以前，(9)式成立，现在将它写成

$$(10)\quad \|\theta_t\|_1^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|^2 = -(\rho_t, \theta_t)$$

$$-\frac{d}{dt}\varepsilon_h(P_1 u_t, \theta) + \varepsilon_h(P_1 u_{tt}, \theta).$$

这里，

$$|(\rho_t, \theta_t)| \leqslant \|\rho_t\|\|\theta_t\| \leqslant ch^2\|u_t\|_2\|\theta_t\|_1$$
$$\leqslant Ch^4\|u_t\|_2^2 + \|\theta_t\|_1^2.$$

进一步，由引理1，有

$|\varepsilon_h(P_1 u_t, \theta)| \leqslant ch^2\|\nabla P_1 u_t\|\|\nabla\theta\| \leqslant ch^4\|u_t\|_1^2 + 1/4\|\nabla\theta\|^2$，

并且由用u_{tt}代替u_t的类似估计成立。于是，通过(10)式对t积分并注意$\theta(0) = 0$，我们得到

$$\|\nabla\theta(t)\|^2 \leqslant Ch^4\{\|u_t(t)\|_1^2 + \int_0^t (\|u_t\|_2^2 + \|u_{tt}\|_1^2)ds\}$$
$$+ \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 ds.$$

这样，定理的结果即可由Gronwall引理得到。

作为引理的一个应用，我们证明如下最大模误差估计。

定理3. 假定V_h满足

$$\|\nabla(V_h - P_1 V)\| \leqslant Ch^3.$$

那么，在适当的正则性假定之下，对于方法(5)的误差当 $o \leqslant t \leqslant t^*$ 时，有

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_\infty} \leqslant C(t^*, u) h^2 \log 1/h.$$

证明。回忆到，由于剖分是拟一致的，故有（第五章引理 4）

$$\|\chi\|_{L_\infty} \leqslant C(\log \frac{1}{h})^{1/2} \|\nabla \chi\|, \qquad \forall \chi \in S_h$$

对 $\psi = \theta$ 应用这个不等式并由引理 2，可导出

$$\|\theta(t)\|_{L_\infty} \leqslant C(t^*, u) h^2 (\log \frac{1}{h})^{1/2}$$

其次，根据椭圆问题的最大模估计（参看第五章引理5），

$$\|\rho(t)\|_{L_\infty} \leqslant Ch^2 \log \frac{1}{h} \|u(t)\|_{W_\infty^2(\Omega)}.$$

于是定理证毕。

我们指出，在定理 1 和引理 2 的误差分析中，对于解的正则性要求比标准 Galerkin 法的情形更高。例如，对于齐次方程，按照 $\dot{H}^s(\Omega)$ 中范数定义所作的标准计算，那么定理 1的结果是

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leqslant Ch^2 \|V\|_3, \qquad \text{对于} V \in \dot{H}^3(\Omega).$$

类似地，引理 2 的估计是

$$\|\nabla\theta(t)\| \leqslant Ch^2 \|V\|_4, \qquad \text{对于} V \in \dot{H}_4(\Omega).$$

除了正则性之外，这些估计还要求在 $\partial\Omega$ 上 $V = \Delta V = 0$。我们现在来说明，对于正的 t，利用前面对于非光滑初值的误差估计技术，可以取销后一边界条件（即 $\Delta V = 0$）的要求。

引理 3。考虑齐次方程($f = 0$)并令 $\theta = u_h - P_1 u$。则对

每一$t^*>0$，存在一个常数C，使得若$\theta(0)=0$，那么对$0\leqslant t\leqslant t^*$和$V\in H^2(\Omega)$，有

$$\|\theta(t)\|\leqslant Ch^2t^{-1/2}\|V\|_2$$

和

$$\|\nabla\theta(t)\|\leqslant Ch^2t^{-1}\|V\|_2.$$

证明。用t乘(8)，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(t\|\theta\|_h^2\right)+t\|\nabla\theta\|^2=-t(\rho_t,\theta)-t\varepsilon_h(P_1u_t,\theta)$$

$$+\frac{1}{2}\|\theta\|_h^2.$$

由对t积分及通常的估计，

$$(11)\quad t\|\theta\|_h^2+\int_0^t s\|\nabla\theta\|^2ds\leqslant Ch^4\int_0^t(s^2\|u_t\|_2^2+s\|u_t\|_1^2)ds$$

$$+C\int_0^t\|\theta\|_h^2ds$$

$$\leqslant Ch^4\|V\|_1^2+C\int_0^t\|\theta\|_h^2ds,$$

为了估计右端后一积分，令$\tilde\theta(t)=\int_0^t\theta(s)ds$，并从0到$t$积分误差方程(7)，则有

$$(\theta,\chi)_h+(\nabla\tilde\theta,\nabla\chi)=(\rho(o)-\rho(t),\chi)$$

$$-\varepsilon_h(P_1(u(t)-V),\chi),\qquad\forall\chi\in S_h.$$

取$\chi=\theta=\tilde\theta_t$，由此得

$$\|\theta\|_h^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\tilde\theta\|^2=(\rho(o)-\rho(t),\tilde\theta)-$$

$$\frac{d}{dt}\varepsilon_h(P_1(u(t)-V),\tilde\theta)+\varepsilon_h(P_1u_t,\tilde\theta),$$

因此可得

$$\int_0^t \|\theta\|_h^2 ds + \|\nabla\theta\|^2 \leqslant Ch^4 \int_0^t (\|u(s)\|_2 + \|V\|_2)^2 ds$$
$$+ Ch^4 \|\nabla P_1(u(t) - V)\|^2$$
$$+ Ch^4 \int_0^t \|\nabla P_1 u_t\|^2 ds + \int_0^t \|\nabla\theta\|^2 ds,$$

于是，由Gronwall引理，对 $t \leqslant t^*$,

$$(12) \quad \int_0^t \|\theta\|_h^2 ds \leqslant Ch^4 \{\|V\|_2^2 + \int_0^t \|u\|_3^2 ds\} \leqslant Ch^4 \|V\|_2^2.$$

这与(11)合并起来，引理的第一个估计得证。

为了证明对$\nabla\theta$的估计，用 t^2乘(10)以得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (t^2 \|\nabla\theta\|^2) \leqslant -\frac{d}{dt}(t^2 \varepsilon_h(P_1 u_t, \theta)) + Ct^2 \|\rho_t\|^2$$
$$+ t^2 \varepsilon_h(P_1 u_{tt}, \theta) + 2t\varepsilon_h(P_1 u_t, \theta) + t\|\nabla\theta\|^2$$

通过对 t 积分和明显的估计，我们得到

$$t^2 \|\nabla\theta(t)\|^2 \leqslant Ct^2 h^2 \|\nabla P_1 u_t(t)\| \|\nabla\theta(t)\| + Ch^4 \int_0^t s^2 \|u_t\|_2^2 ds$$
$$+ Ch^4 \int_0^t (s^3 \|\nabla P_1 u_{tt}\|^2 + s\|\nabla P_1 u_t\|^2) ds$$
$$+ C\int_0^t s\|\nabla\theta\|^2 ds,$$

于是，有

$$t^2 \|\nabla\theta(t)\|^2 \leqslant Ch^4 \{t^2 \|\nabla u_t(t)\|^2 + \int_0^t (s^3 \|u_{tt}\|_1^2 + s^2 \|u_t\|_2^2$$
$$+ s\|u_t\|_1^2) ds\}$$
$$+ C\int_0^t s\|\nabla\theta\|^2 ds \leqslant Ch^4 t\|V\|_2^2 + C\int_0^t s\|\nabla\theta\|^2 ds.$$

利用前面的估计(11)和(12)并由于 $t \leqslant t^*$，从而得到

$$t^2 \|\nabla\theta(t)\|^2 \leqslant Ch^4 \|V\|_2^2,$$

定理证完。

至于引理 3 配合其他不同的辅助估计，可以导出具初值

$V\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 的齐次半离散方程的 L_2 和 L_∞ 模误差估计，这是明显的事情，我们就不再详述了。

自然，质量集中法也可以结合时间离散化加以运用。例如，令 $\bar\partial_t$ 象通常那样表示向后差商，$0\leqslant\kappa\leqslant1$，可以考虑如下方法

$$(\bar\partial_t U^n,\chi)_h+\kappa(\nabla U^n,\nabla\chi)+(1-\kappa)(\nabla U^{n-1},\nabla\chi)$$
$$=(f(t_{n-1}+\kappa k),\chi),\qquad \forall\chi\in S_h,\quad n=1,2,\cdots,$$
$$U^0=V_h,$$

用 α^n 表示 U^n 关于基底 $\{\varphi_i\}_1^{N_h}$ 的坐标向量和 $F^{n-1+\kappa}$ 代表以 $(f(t_{n-1}+\kappa k),\varphi_i)$ 为分量的向量，那么可将此方程写成矩阵形式

$$\bar A k^{-1}(\alpha^n-\alpha^{n-1})+\kappa B\alpha^n+(1-\kappa)B\alpha^{n-1}=F^{n-1+\kappa},$$

由于 $\bar A+\kappa kB$ 显然是正定的，所以它等价于

$$\alpha_n=(\bar A+\kappa kB)^{-1}(\bar A-(1-\kappa)kB)\alpha^{n-1}+$$
$$(\bar A+\kappa kB)^{-1}kF^{n-1+\kappa}.$$

这里，$\kappa=1$ 相应于向后 Euler 方法，$\kappa=1/2$ 相应于 Crank－Nicolson 方法。对于 $\kappa=0$，由于 $\bar A$ 为对角矩阵，所以得到的是一个纯粹的显格式。

作为一个例子，让我们扼要地分析一下向后Euler方法并证明：

定理 4. 对于向后Euler方法，当 $t_n=nk>0$ 时，有

$$\|U^n-u(t_n)\|\leqslant C\|V_h-V\|+Ch^2\{\|V\|_2+\|u(t_n)\|_2$$
$$+\left(\int_0^{t_n}\|u_t\|_2^2ds\right)^{1/2}\}+Ck\left(\int_0^{t_n}\|u_{tt}\|^2ds\right)^{1/2}$$

证明. 令 $u^n=u(nk)$，象通常那样，设

$$U^n-u^n=(U^n-P_1u^n)+(P_1u^n-u^n)=\theta^n+\rho^n.$$

已知

$$\|\rho^n\| \leqslant Ch^2 \|u^n\|_2.$$

对于θ^n，我们有

$$\begin{aligned}
&(\bar{\partial}_t \theta^n, \chi)_h + (\nabla\theta^n, \nabla\chi) \\
&= (\bar{\partial}_t U^n, \chi)_h + (\nabla U^n, \nabla\chi) - (\bar{\partial}_t P_1 u^n, \chi)_h \\
&\quad - (\nabla P_1 u^n, \nabla\chi) \\
&= (f^n, \chi) - (\bar{\partial}_t P_1 u^n, \chi)_h - (\nabla u^n, \nabla\chi) \\
&= (u_t^n, \chi) - (\bar{\partial}_t P_1 u^n, \chi)_h.
\end{aligned}$$

取$\chi = \theta^n$，经过一些合并整理之后，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2k}\left(\|\theta^n\|_h^2 - \|\theta^{n-1}\|_h^2\right) + \frac{1}{2k}\|\theta^n - \theta^{n-1}\|_h^2 + \|\nabla\theta^n\|^2 \\
&= (u_t^n - \bar{\partial}_t u^n, \theta^n) + (\bar{\partial}_t u^n - \bar{\partial}_t P_1 u^n, \theta^n) - \varepsilon_h(\bar{\partial}_t P_1 u^n, \theta_n) \\
&= R_1 + R_2 + R_3.
\end{aligned}$$

类似于定理1的证明，我们来估计右端那三项。首先，有

$$\begin{aligned}
|R_2| &\leqslant \|(I - P_1)\bar{\partial}_t u^n\| \|\theta^n\| \\
&\leqslant Ch^2 \|\bar{\partial}_t u^n\|_2 \|\theta^n\| = Ch^2 \|k^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n} u_t ds\|_2 \|\theta^n\| \\
&\leq Ch^2 k^{-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_t\|_2 ds \|\nabla\theta^n\| \\
&\leq Ch^2 k^{-1/2} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_t\|_2^2 ds\right)^{1/2} \|\nabla\theta^n\|.
\end{aligned}$$

其次，再由引理1，

$$\begin{aligned}
|R_3| &\leq Ch^2 \|\nabla P_1 \bar{\partial}_t u^n\| \|\nabla\theta^n\| \leq Ch^2 \|\bar{\partial}_t \nabla u^n\| \|\nabla\theta^n\| \\
&\leq Ch^2 k^{-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla u_t\| ds \|\nabla\theta^n\| \\
&\leq Ch^2 k^{-1/2} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_t\|_2^2 ds\right)^{1/2} \|\nabla\theta^n\|.
\end{aligned}$$

最后，对时间离散化带来的误差R_1，我们有

$$|R_1|\le\|u_t^n-\bar{\partial}_t u^n\|\|\theta^n\|=\|k^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(s-t_{n-1})u_{tt}(s)ds\|\|\theta^n\|$$

$$\le C\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{tt}\|ds\|\nabla\theta^n\|$$

$$\le Ck^{1/2}(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{tt}\|^2ds)^{1/2}\|\nabla\theta^n\|.$$

综合起来，得到

$$\frac{1}{2k}(\|\theta^n\|_h^2-\|\theta^{n-1}\|_h^2)+\|\nabla\theta^n\|^2$$

$$\le\|\nabla\theta^n\|^2+ch^4k^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t\|_2^2ds+ck\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{tt}\|^2ds,$$

于是有

$$\|\theta^n\|_h^2\le\|\theta^{n-1}\|_h^2+ch^4\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t\|_2^2ds+ck^2\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{tt}\|^2ds,$$

或

$$\|\theta^n\|_h^2\le\|\theta^0\|_h^2+Ch^4\int_0^{t_n}\|u_t\|_2^2ds+Ck^2\int_0^{t_n}\|u_{tt}\|^2ds.$$

已知$\|\cdot\|_h$和$\|\cdot\|$等价，并有

$$\|\theta^0\|=\|V_h-P_1V\|\le\|V_h-V\|+Ch^2\|V\|_2,$$

从而定理得证。

现在，我们考虑质量集中法的另一个性质。这个性质表明一个极值原理的存在性，它在剖分不包含钝角三角形的附加假定下成立。

为了简单起见，我们考虑齐次方程

$$(u_{h,t},\chi)_h+(\nabla u_h,\nabla\chi)=0,\qquad\forall\chi\in S_h,$$

并用$E_h(t):S_h\to S_h$表示这个问题的解算子。我们来证明，

定理 5. 假定剖分$\mathcal{T}_h$中所有的角$\le\pi/2$，则

$$\min(0,\min_{x\in\Omega}V_h(x))\le(E_h(t)V_h)(x)\le\max(0,\max_{x\in\Omega}V_h(x)),$$

$$\forall V_h \in S_h.$$

特别地，$E_h(t)$关于最大模是稳定的，即有

$$\|E_h(t)V_h\|_{L_\infty} \leq \|V_h\|_{L_\infty}.$$

证明。如同以前，将方程组写成矩阵形式

$$\bar{A}\alpha'(t) + B\alpha(t) = 0, \text{对于} t \geq 0,$$

$$\alpha(0) = \gamma,$$

其中$\alpha(t)$和γ为向量，它们的分量分别是$u_h(t) = E_h V_h$和V_h关于S_h的基底$\{\varphi\}_1^{N_h}$的坐标，$\bar{A} = ((\varphi_j, \varphi_l)_h)$ 为对角矩阵，$B = ((\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_l))$是刚度矩阵。显然，$u_h(t)$和$V_h$的最大与最小值是与$\alpha(t)$和$\gamma$的分量的相应值一致的。因为

$$\alpha(t) = \exp(-\bar{A}^{-1}Bt)\gamma = \exp(-\tilde{B}t)\gamma = G(t)\gamma, \quad t \geq 0,$$

这里，$\tilde{B}$和$G(t)$由后面两个等号定义，所以，为了证明定理的第一个论断，只需要证明矩阵$G(t) \geq 0$（即$G(t)$的所有元素非负）和对于每一个j，

$$\sum_{l=1}^{h} g_{jl}(t) \leq 1. \tag{13}$$

先来证明$G(t) \geq 0$。我们注意到矩阵B的非对角元素是非正的。事实上，由于$\nabla\varphi_j$在每个$\tau \in \mathscr{T}_h$上是常数，故

$$b_{jl} = (\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_l) = \sum_{\tau \in \mathscr{T}_h} \nabla\varphi_j|_\tau \cdot \nabla\varphi_l|_\tau \cdot \tau \text{ 的面积},$$

这里，$\nabla\varphi_j|_\tau$是τ的与P_j相对的那条边的法线方向，由于τ无钝角，所以对于$j \neq l$，$\nabla\varphi_j|_\tau \cdot \nabla\varphi_l|_\tau \leq 0$，从而对于$j \neq l$，$b_{jl} \leq 0$。证明的下一步将依赖于如下简单的矩阵引理。

引理4．设$M = (m_{jl})$是一个正定对称矩阵，且对于$j \neq l$，$m_{jl} \leq 0$，则$M^{-1} \geq 0$。

证明。令$\mu = \max\limits_j m_{jj}$和$K = \mu I - M$，则$K$是一个具有非负元素的对称矩阵，故其最大特征值$\lambda_{max}$必定等于它的谱

半径$\rho(K)$。事实上，若λ是K的一个特征值，X是相应的标准化的特征向量，$|X|$是以X的相应分量的模为分量的向量，则

$$|\lambda| = |X^T \cdot KX| \leq |X|^T \cdot K|X| \leq \lambda_{max}.$$

这样一来，有$\rho(K) = \mu - \gamma$，其中γ是M的一个特征值.由于M是正定的，所以γ是正数。从而，可以断定$\rho(k) < \mu$和

$$M^{-1} = (\mu I - K)^{-1} = \mu^{-1}(1 - u^{-1}K)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{-i-1} k^i \geq 0.$$

引理得证。

我们现在用此引理来证明$(I + K\tilde{B})^{-1} \geq 0$，对于$k > 0$。事实上，因为$\bar{A} + kB$适合引理的假定，所以$(\bar{A} + kB)^{-1} \geq 0$，从而

$$(I + k\tilde{B})^{-1} = (\bar{A}^{-1}(\bar{A} + kB))^{-1} = (\bar{A} + kB)^{-1}\bar{A} \geq 0.$$

由于非负矩阵的幂仍然是非负的，故可断定

$$G(t) = \exp(-t\tilde{B}) = \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{t}{n}\tilde{B}\right)^{-n} \geq 0.$$

下面，通过证明(13)来完成定理的证明。若$\underline{1}$表示分量全是1的N_1维向量，则(13)也就是（按分量形式）

$$G(t) \cdot \underline{1} \leq \underline{1}.$$

下面将证明$B \cdot \underline{1} \geq 0$。暂时假定此结论成立，则有

$$(\bar{A} + kB) \cdot \underline{1} \geq \bar{A} \cdot \underline{1}$$

由此可得

$$(\bar{A} + kB)^{-1}\bar{A} \cdot \underline{1} = (I + k\tilde{B})^{-1} \cdot \underline{1} \leq \underline{1},$$

于是，如同上面，

$$G(t) \cdot \underline{1} = \exp(-t\tilde{B}) \cdot \underline{1} = \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{t}{n}\tilde{B}\right)^{-n} \underline{1} \leq \underline{1}.$$

现在来证明$B \cdot \underline{1} \geq 0$。为此，我们扩充基函数的集合

$\{\varphi_i\}_1^{N_h}$，即增加相应于边界顶点的棱锥函数$\{\varphi_{N_h+l}\}_{l=1}^{M_h}$．实际上，只需考虑在$\mathscr{T}_h$所确定的多边形$\Omega_h$上定义的那些函数，所以没有必要扩展$\mathscr{T}_h$．按与前面相同的方法，对于一个内部顶点$P_i$和一边界顶点$P_{N_h+l}$，我们有

$$(\nabla\varphi_i,\nabla\varphi_{N_h+l})\leq 0.$$

因于Ω_h内$\sum_{j=1}^{N_h+M_h}\varphi_j=1$，所以

$$\sum_{l=1}^{N_h} b_{il}=\sum_{l=1}^{N_h}(\nabla\varphi_i,\nabla\varphi_l)=(\nabla\varphi_i,\nabla\sum_{l=1}^{N_h+M_h}\varphi_l)$$

$$-\sum_{l=1}^{M_h}(\nabla\varphi_i,\nabla\varphi_{N_h+l})\geqslant 0.$$

这便是所要证的结论，从而完成了最大值原则的证明．定理的第二个论断是头一个论断的直接推论．

在一定的假设条件之下，最大值原则对于全离散格式（$\kappa\in[0,1]$）

$$(14)\quad (\bar{\partial}_t U^n,\chi)_h+(\nabla(\kappa U^n+(1-\kappa)U^{n+1}),\nabla\chi)=0,$$
$$\forall\chi\in S_h,\qquad n=1,2,\cdots,$$
$$U^0=V_h,$$

仍然成立．

为了表述我们的假设条件，设$\tau\in\mathscr{T}_h$是以P_i为一顶点的三角形，用$\delta_{i,\tau}$表示从P_i到其在τ内的对边的距离，并令$\delta_{\min}$是所有$\delta_{i,\tau}$的最小值，则有

定理6． 假设$\mathscr{T}_h$的所有角$\leq\pi/2$，且

$$(1-\kappa)k\leq\frac{1}{3}\delta_{\min}^2,$$

则(14)的解满足

$$\min(0,\min_{x\in\Omega}V_h(x))\le U^n(x)\le\max(0,\max_{x\in\Omega}V_h(x)),\ n\geqslant 0,$$

特别地，

$$\|U^n\|_{L_\infty}\le\|V_h\|_{L_\infty}.$$

证明。象上面一样，将格式(14)写成矩阵形式

$$\alpha^n=(\bar{A}+\kappa kB)^{-1}(\bar{A}-(1-\kappa)kB)\alpha^{n-1}=\bar{G}_{k,\kappa}\alpha^{n-1}.$$

如同以前，我们需要证明$\bar{G}_{k,\kappa}\geqslant 0$和$\bar{G}_{k,\kappa}\underline{1}\le\underline{1}$。对于向后Euler格式，相应于$\kappa=1$，由前面定理5 的证明，即可得到本定理相应结果。对于更一般情形，即$\kappa\in[0,1]$，由引理 4 仍然有$(\bar{A}+\kappa kB)^{-1}\geqslant 0$。为了保证$\bar{G}_{k,\kappa}\geqslant 0$，现在要求$\bar{A}-(1-\kappa)kB\geqslant 0$.由于$b_{jl}\le 0$，$j\neq l$,为此只需要求

$$\bar{a}_{jj}-(1-\kappa)kb_{jj}\geqslant 0,\ 对于 j=1,\cdots,N_h,$$

或者

$$(1-\kappa)k\|\nabla\varphi_j\|^2\le\|\varphi_j\|_h^2,\ 对于 j=1,\cdots,N_h.$$

但是由于

$$\|\nabla\varphi_j\|^2=\sum_{\tau\in\mathrm{supp}\,\varphi_j}\delta_{j,\tau}^{-2}\cdot\tau的面积,$$

和

$$\|\varphi_j\|_h^2=\frac{1}{3}\sum_{\tau\in\mathrm{supp}\,\varphi_j}\tau的面积=\frac{1}{3}D_j的面积,$$

所以上述条件当

$$(1-\kappa)k\le\frac{1}{3}\delta_{j,\tau}^2,\quad 对所有 j,\tau,$$

时成立，而此式在定理的假设下是成立的，因为 $B\cdot\underline{1}\geqslant 0$，如同前面，我们有

$$(\bar{A}+k\kappa B)\cdot\underline{1}\geqslant(\bar{A}-k(1-k)B)\cdot\underline{1},$$

于是

$$\bar{G}_{k,\kappa}\cdot\underline{1}=(\bar{A}+k\kappa B)^{-1}(\bar{A}-\kappa(1-\kappa)B)\cdot\underline{1}\le\underline{1},$$

定理证毕。

与标准 Galerkin 法的情形作一比较也许是有启发的。为此，我们考虑全离散格式

$$\alpha^n=(A+\kappa kB)^{-1}(A-(1-\kappa)kB)\alpha^{n-1}=G_{k,\kappa}\alpha^{n-1}.$$

$A+\kappa kB$ 仍然为正定对称矩阵，但是，它的非对角元素并不不是自动地≤ 0。为了使得此事成立，我们可以要求

(15) $\quad(\varphi_j,\varphi_l)+\kappa k(\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_l)\leq 0,\qquad j\neq l.$

一旦此条件满足，那么，和前面一样，有

$(A+\kappa kB)^{-1}\geqslant 0$。如果还满足条件

(16) $\quad a_{jj}-(1-\kappa)kb_{jj}\geqslant 0$

和设有钝角三角形，那么结论和前面一致。条件(16)归之于

$$(1-\kappa)k\|\nabla\varphi_j\|^2\leq\|\varphi_j\|^2=\frac{1}{6}D_j\text{的面积},$$

由此可得

(17) $\quad(1-\kappa)k\leq\frac{1}{6}\delta^2_{\min}$,

这是(16)的一个充分条件。

为了研究条件(15)，回忆在$\tau\in\mathscr{T}_h$上，$\nabla\varphi_j|_\tau$是τ的与P_j相对的那条边的内法方向。容易得到，当 $\alpha_{j\,l,\tau}$ 为 τ 的与边P_jP_l相对的顶角时，有

$$\cos\alpha_{j\,l,\tau}=-\frac{\nabla\varphi_j|_\tau\cdot\nabla\varphi_l|_\tau}{|\nabla\varphi_j||_\tau|\nabla\varphi_l||_\tau},$$

现在假定剖分是严格锐角的，此时所有的角严格小于 $\pi/2$，则有$\sigma_h=\min\limits_{j,l,\tau}\cos\alpha_{j\,l,\tau}>0$和

$$\int_\tau\nabla\varphi_j\cdot\nabla\varphi_l\,dx=-\cos\alpha_{j,l,\tau}\cdot|\nabla\varphi_j||_\tau|\nabla\varphi_l||_\tau\cdot\tau\text{的面积}$$

$$=-\cos\alpha_{j,l\tau}\cdot\delta^{-1}_{j,\tau}\cdot\delta^{-1}_{l,\tau}\cdot\tau\text{的面积}.$$

所以，如果对所有的j,l和相关联的τ，有

$$\kappa k \geqslant \frac{\delta_{j,\tau} \cdot \delta_{l,\tau}}{12\cos\alpha_{j\,l,\tau}},$$

那么

$$\int_\tau \varphi_j \varphi_l dx + \kappa k \int_\tau \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_l dx$$

$$= \left(\frac{1}{12} - \kappa k \frac{\cos\alpha_{j\,l,\tau}}{\delta_{j,\tau}\,\delta_{l,\tau}}\right)\tau\text{的面积} \leq 0。$$

所以(15)成立的一个充分条件是

(18) $\qquad \kappa k \geqslant 1/12\delta^2_{max}/\sigma_k$。

但是要注意，关于k的条件(17)和(18)，一般地是不能同时被满足的。例如，若$\kappa = 1/2$，上述两个条件只有在

$$\frac{1}{12}\delta^2_{max}/\sigma_k \leq \frac{1}{6}\delta^2_{min}$$

即

(19) $\qquad \delta_{max} \leq \sqrt{2\sigma_k}\,\delta_{min}$

时，才能同时成立。如果$\mathscr{T}_k$包含一个非等边的三角形，则存在一个大于$\pi/3$的角。在这种情形，$\sigma_k < 1/2$，于是条件(19)要求$\delta_{max} < \delta_{min}$是不可能的。对于向后Euler方法，条件(17)消失，而条件(18)则给出k的一个下界。

参 考 文 献

这里所描述的质量集中方法是〔1〕中所分析的方法族中一个特殊情形。引理2的超收敛结果和相应的最大模估计连同降低正则性要求和的估计选自〔2〕。定理5和6的最大模原则包含在〔3〕中。

1. P. A. Raviart, The use of numerical integration in finite element methods for solving parabolic equations. Topics in Numerical Analysis, ed. J. J. H Miller. Academic Press, PP. 233－264 (1973).
2. C. M. Chen and V. Thomèe, The lumped mas finite element method for a parabolic problem. J. Austr. Math. Soc., Ser. B. To appear.
3. H. Fujii, Some remarks on finite element analysis of time－dependent field problems. Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, University of Tokyo Press, PP. 91－106 (1973).

第十二章　H^1和H^{-1}方法

在这一章里，我们扼要地讨论一下不同于前面所考虑的 Galerkin 方法的其他一些方法。这些方法不是使用 $L_2(\Omega)$内积，而是使用其他内积陈述半离散问题。为简单起见，我们把内容限定于描述单个空间变数的简单抛物问题和仅仅考虑半离散方法。

考虑初边值问题：

（1）　$u_t + Au = f$，于$I\times[0,\infty)$内，其中 $I=[0,1]$，

$u(0,t)=u(1,t)=0$，$t\geqslant 0$，

$u(\cdot,0)=V$，于 I 内，

这里，

$$Au\equiv -(au')' + bu,$$

a和b是I上的光滑函数，且a为正，b为非负。

设 r 和 k 为整数，并且 $r\geqslant 4$，$1\leqslant k\leqslant r-2$。令 $0=x_0<x_1<\cdots<x_M=1$ 是 I 的一个剖分，设

$$S_h=\{\chi\in C^k(I);\chi|_{(x_{j-1},x_j)}\in\Pi_{r-1},\ j=1,\cdots,M;$$
$$\chi(0)=\chi(1)=0\}.$$

那么，特别地，$S_h\cap H^2(I)\cap H_0^1(I)$，和对于在 $x=0$ 与 $x=1$ 处取零值的函数V，按我们的标准记号 ($h=\max(x_j-x_{j-1})$)，有

（2）　$$\inf\{\|V-\chi\|+h\|V-\chi\|_1+h^2\|V-\chi\|_2\}$$
$$\leqslant Ch^s\|V\|_s,\quad 2\leqslant s\leqslant r.$$

引进相应于A的双线性形式

$$A(V,W)=\int_0^1(aV'W'+bVW)dx,$$

对于上述抛物问题的半离散H^1方法则为求u_h: $[0,\infty)\to S_h$, 使得

(3) $A(u_{h,t},\chi)+(Au_h,A\chi)=(f,A\chi)$, $\forall\chi\in S_h$,
$t\geqslant 0$, $u_h(0)=V_h$.

与它相应的弱陈述可以通过在I上用$A\varphi$乘抛物方程再积分并对第一项作分部积分导出。这也可以认为是来自关于内积$A(\cdot,\cdot)$的弱陈述

$$A(u_t,\varphi)+A(Au,\varphi)=A(f,\varphi);$$

由于$f-Au=u_t$于$x=0$和$x=1$处等于零，分部积分一次便将此式化成(3)的形式。

设$\{\varphi_i\}_1^{N_h}$为S_h的基底，则可将半离散问题(3)写成矩阵形式

(4) $B_0\alpha'(t)+B_1\alpha(t)=\hat{f}(t)$, $t\geqslant 0$,
$\alpha(0)=\gamma$,

其中B_0和B_1的元素分别为$A(\varphi_j,\varphi_l)$和$(A\varphi_j,A\varphi_l)$。这样，B_0和B_1都是对称和正定的。显然，对于$t\geqslant 0$，(4)的解存在而且唯一。

如同抛物问题的通常分析，需要单独地研究相应的定常问题，于此这就是两点边值问题

(5) $Au=f$, 于I内,
$u(0)=u(1)=0$.

因此，这里需要考虑的离散问题就是求$u_h\in S_h$，使得

(6) $(Au_h,A\chi)=(f,A\chi)$, $\forall\chi\in S_h$.

容易验证，这个Galerkin陈述，实际上等价于最小平方根法，即求$u_h\in S_h$，使得$\|Au_h-f\|$尽可能的小。

我们从证明如下结果开始。

引理1. 设u_h和u分别是(6)和(5)的解，则

$$\|u_h-u\|+h\|(u_h-u')\|+h^2\|(u_h-u)''\|\leqslant Ch^s\|u\|_s,$$
$$2\leqslant s\leqslant r,$$

并有

$$\|u_h-u\|_{-q}\leqslant ch^{s+q}\|u\|_s,\ 2\leqslant s\leqslant r,\ 0\leqslant q\leqslant r-4,$$

其中$\|V\|_{-q}=\sup\{(V,\varphi)/\|\varphi\|_q;\varphi\in H^q(I)\}$，$q\geqslant 0$。

证明 对于误差 $e=u_h-u$，我们有

$$(Ae,A\chi)=0,\ \forall\chi\in S_h,\tag{7}$$

故对于$\chi\in S_h$，有

$$\|Ae\|^2=(Ae,\ A(\chi-u))\leqslant\|Ae\|\|A(\chi-u)\|,$$

从而，由(2)，

$$\|Ae\|\leqslant\inf_{\chi\in S_h}\|A(\chi-u)\|\leqslant Ch^{s-2}\|u\|_s.\tag{8}$$

不难看到

$$\|e''\|\leqslant C\|Ae\|,$$

于是关于二阶导数的估计得证。

现在来讨论负模估计，作为一个特殊情形，它包含L_2-模估计。我们将证明

$$|(e,\varphi)|\leqslant Ch^{s+q}\|u\|_s\|\varphi\|_q.$$

为此目的，对于给定的φ，令ψ是两点边值问题

$$A^2\psi=\varphi,\ 于 I 内,$$
$$\psi(0)=A\psi(0)=\psi(1)=A\psi(1)=0,$$

的解。已知对任意$q\geqslant 0$，

$$\|\psi\|_{q+4}\leqslant C\|\varphi\|_q.$$

利用分部积分和边值条件，可得

$$(e,\varphi)=(e,A^2\psi)=(Ae,A\psi),$$

于是，根据(7)，(8)和(2)，有

$$(e,\varphi)=(Ae,A(\psi-\chi))\leqslant\|Ae\|\inf_{\chi\in S_h}\|A(\psi-\chi)\|$$

$$\leqslant (Ch^{s-2}\|u\|_s)(Ch^{q+2}\|\psi\|_{q+4}) \leqslant Ch^{s+q}\|u\|_s\|\varphi\|_q,$$

此即要证的估计。

最后，对于一阶导数，我们有

$$\|e'\|^2 \leqslant CA(e,e) = C(Ae,e) \leqslant C\|Ae\|\|e\|$$
$$\leqslant (Ch^{s-2}\|u\|_s)(Ch^s\|u\|_s) = (Ch^{s-1}\|u\|_s)^2,$$

定理证完。

我们还将证明：对于近似函数至多是二次可微的情形，亦即当 $k=1$ 或 2，误差在剖分节点上具有超收敛性。对 $k=1$的情形，误差的微商也有这样的性质。

引理 2 设$\bar{x}$是剖分的一个节点，并设 u_h 和 u 分别是(6)和(5)的解，则有

$$|u_h(\bar{x}) - u(\bar{x})| \leqslant Ch^{2r-4}\|u\|_r, \text{ 当} k=1 \text{ 或 } 2 \text{ 时},$$
$$|u_h'(\bar{x}) - u'(\bar{x})| \leqslant Ch^{2r-4}\|u\|_r, \text{ 当} k=1\text{时}.$$

证明 令$G = G^x$是两点边值问题(5)的Green 函数，则(5)的解可以表示成

$$(9) \qquad u(x) = (f, G^x) = (Au, G^x).$$

特别地，若令$g_0 = TG^{\bar{x}}$，T是(5)的解算子，则对任意$V \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$有

$$(10) \quad V(\bar{x}) = (AV, G^{\bar{x}}) = (AV, ATG^{\bar{x}}) = (AV, Ag_0).$$

注意由于$G^{\bar{x}}$属于 $C^0(I) \cap C^\infty(I \setminus \{\bar{x}\})$，则有$g_0 \in C_r^2(I) \cap C^\infty(I \setminus \{\bar{x}\}) \cap H_0^1(I)$，并且由于$\bar{x}$是剖分节点，因此对$k \leqslant 2$有

$$(11) \qquad \inf_{x \in S_h} \|g_0 - \chi\|_2 \leqslant Ch^{r-2}.$$

现在，应用(10)于$e = u_h - u$，根据(7)，对任意$\chi \in S_h$，有

$$e(\bar{x}) = (Ae, Ag_0) = (Ae, A(g_0 - \chi)),$$

因此，利用(11)和引理 1，得到

$$|e(\bar{x})|\leqslant C\|e\|_2\inf_{\chi\in S_h}\|g_0-\chi\|_2\leqslant Ch^{2r-4}\|u\|_r,$$

这就是引理的第一个估计。

微分(9)式，我们得到

$$u'(x)=(Au,\frac{d}{dx}G^x),$$

令 $g_1=T\left(\frac{d}{dx}G^x\right)\Big|_{x=\bar{x}}$，类似于上面则有

$$e'(\bar{x})=(Ae,Ag_1)=(Ae,A(g_1-\chi)),\ \forall\chi\in S_h.$$

由于$\frac{d}{dx}G^x(y)$仅于$y=x$有简单的不连续性，即

$g_1\in C^1(I)\cap C^\infty(I\setminus\{\bar{x}\})\cap H_0^1(I)$，所以，对于$k=1$，

$$\inf_{\chi\in S_h}\|g_1-\chi\|_2\leqslant Ch^{r-2},$$

从而，

$$|e'(x)|\leqslant C\|e\|_2\inf_{\chi\in S_h}\|g_1-\chi\|_2\leqslant Ch^{2r-4}\|u\|_r.$$

至此定理证完。

现在已做好分析抛物问题误差的准备，我们将利用椭圆投影$P_2:H^2(I)\cap H_0^1(I)\to S_h$，它相应于解定常问题的方法(6)，也就是说，

$$(A(P_2u-u),\ A\chi)=0,\ \forall\chi\in S_h,$$

由引理 1，有

$$(12)\quad \|P_2u-u\|_q\leqslant Ch^{s-q}\|u\|_s,$$

$$\text{对于}-(r-4)\leqslant q\leqslant 2\leqslant s\leqslant r.$$

我们从下述定理开始：

定理 1　设u_h和u分别是(3)和(1)的解，若$V_h=P_2V$，

则有

$$\|u_h(t)-u(t)\|\leqslant Ch^r\{\|u(t)\|_r+(\int_0^t\|u_t\|_r^2ds)^{1/2}\}$$

和

$$h\|u_h(t)-u(t)\|_1+h^2\|u_h(t)-u(t)\|_2\leqslant Ch^r\{\|u(t)\|_r+(\int_0^t\|u_t\|_{r-1}^2ds)^{1/2}\}.$$

证明　把误差写成

$$u_h-u=(u_h-P_2u)+(P_2u-u)=\theta+\rho,$$

由(12)立即可知

$$\|\rho(t)\|+h\|\rho(t)\|_1+h^2\|\rho(t)\|_2\leq Ch^r\|u(t)\|_r.$$

为了估计θ，我们注意：对任意$\chi\in S_h$，

$$A(\theta_t,\chi)+(A\theta,A\chi)=-A(\rho_t,\chi)=-(\rho_t,A\chi)$$

取$\chi=\theta_t$，得到

$$A(\theta_t,\theta_t)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A\theta\|^2=-A(\rho_t,\theta_t)$$
$$\leqslant A(\rho_t,\rho_t)^{1/2}A(\theta_t,\theta_t)^{1/2},$$

因$\theta(0)=0$，由此可知

$$\|A\theta\|^2\leq\frac{1}{2}\int_0^t A(\rho_t,\rho_t)ds\leqslant C\int_0^t\|\rho_t\|_1^2ds$$

从而，由引理1，

$$\|\theta(t)\|_2\leqslant Ch^{r-2}(\int_0^t\|u_t\|_{r-1}^2ds)^{1/}$$

类似地，取$\chi=\theta$，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}A(\theta,\theta)+\|A\theta\|^2=-(\rho_t,A\theta),$$

于是

$$\|\theta\|_1\leqslant C\left(\int_0^t\|\rho_t\|^2ds\right)^{1/2}\leqslant Ch^{r-j}\left(\int_0^t\|u_t\|_{r-j}^2ds\right)^{1/2},\quad j=0,1.$$

综合以上估计，定理得证。

为了说明怎样去证明负模估计和在节点上的超收敛结果，我们简单叙述一下第六章的方法用到这里所需要的更改，令$T_h: L_2(I) \to S_h$是离散问题(6)的解算子，则

$$(13) \qquad (AT_h f, A\chi) = (f, A\chi), \quad \forall \chi \in S_h.$$

象以前一样，令T表示连续问题的解算子，则引理1的估计可以表述成

$$\|T_h f - Tf\|_q \leqslant Ch^{s-q}\|f\|_{s-2}, \quad 对 -(r-4) \leqslant q \leqslant 2 \leqslant s \leqslant r.$$

对于$f \in H_0^1(I)$，定义(13)也可以写成

$$(AT_h f, A\chi) = A(f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h.$$

特别地有

$$(AT_h f, AT_h g) = A(f, T_h g), \quad \forall f, g \in H_0^1(I),$$

由此容易证明：T_h在$H_0^1(I)$上的限制关于内积$A(\cdot,\cdot)$是自共轭、半正定的，同时，若进一步限制在S_h上则为正定的

使用这些记号，抛物问题(3)可以叙述为

$$T_h u_{h,t} + u_h = T_h f, \quad t \geqslant 0,$$

$$u_h(0) = V_h,$$

于是，在第二、三和六章里所建立的技巧便可以运用了。误差方程具有形式

$$T_h e_t + e = \rho = (T_h - T)Au = (P_2 - I)u,$$

记住，在现在的分析中，所用的基本内积是$A(\cdot,\cdot)$，由第二章引理3，我们有

$$\|u_h(t) - u(t)\|_1 \leqslant C\|V_h - V\|_1 + Ch^{r-1}\left\{\|V\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds\right\},$$

对于齐次方程，设$V_h = P_1 V$是由$A(\cdot,\cdot)$定义的，那么，利用第三章定理2的技巧可证

$$\|u_h(t) - u(t)\|_1 \leq Ch^{r-1} t^{-(r-1)/2} \|V\|_1.$$

象第六章那样，也可以定义离散的负模和相应的内积。但是，这里是与$H_0^1(I)$相关联的，所以，它们的定义应为

$$(V,W)_{-s,h}=A(T_h^{s+1}V,W),$$

$$\|V\|_{-s,h}=(V,V)_{-s,h}^{1/2},$$

象在第六章的引理3中那样，容易证明，对于$0\leq s\leq r-2$，$V\in H_0^1(I)$及模$\|V\|_{-s}=(T^sV,V)^{1/2}$，有

$$\|V\|_{-s,h}\leq C(\|V\|_{-s}+h^s\|V\|),$$

和

$$\|V\|_{-s}\leq C(\|V\|_{-s,h}+h^s\|V\|).$$

例如，对于$s=0$和$V\in H_0^1(I)$，我们有

$$\|V\|_{0,h}^2=A(T_hV,V)=(AT_hV,V)\leq\|AT_hV\|\|V\|$$
$$\leq(\|A(T_hV-TV)\|+\|V\|)\|V\|\leq C\|V\|^2.$$

用第六章定理3同样的证明方法，利用这些离散负模可以证明抛物问题的下述负模估计。

定理 2. 设$0\leq s\leq r-4$，并假定V_h满足

$$\|V_h-V\|_{-s}+h^s\|V_h-V\|\leq Ch^{r+s}\|V\|_r,$$

则

$$\|u_h(t)-u(t)\|_{-s}\leq Ch^{r+s}\{\|V\|_r+\int_0^t\|u_t\|_rds\}.$$

这里，我们不给出证明的细节了。

同第六章的状况类似，还可以证明形如

(14) $\|D_t^j(u_h(t)-u(t))\|_{-s}\leq C(t,u)h^{r+s}$，$-2\leq s\leq r-4$的估计。这种估计同样可以用来推导当$S_h$的连续性阶$k$较低时，在节点处的超收敛估计。这时我们有

定理 3. 设$\bar{x}$为剖分的一个节点，并令u_h和u分别是(3)和(1)的解，若$k=1$或2，则对于$e=u_h-u$和$n\geq0$，有

$$(15)\quad |e(\bar{x},t)|\leq C\{h^{r-1}\|D_t^{n+1}e\|_1+h^{r-2}\sum_{j=0}^{n}\|D_t^je\|_2+\|D_t^{n+1}e\|_{-2n}\}.$$

当 $k=1$ 时 ，$\left|\frac{\partial e}{\partial x}(\bar{x},t)\right|$ 亦以上式右端为界。

证明。如同在引理 2 的证明中那样，我们有

$$e(\bar{x},t)=(Ae,Ag_0).$$

令

$$L(V,W)=A(V_t,W)+(AV,AW),$$

和第六章定理 7 的证明一样，

$$e(x,t)=(Ae,Ag_0)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j L(D_t^j e,T^j g_0)+$$
$$(-1)^{n+1}A(D_t^{n+1}e,T^n g_0).$$

注意到

$$L(D_t^j e,\chi)=0,\ \forall\chi\in S_h,$$

则得

$$\begin{aligned}|L(D_t^j e,T^j g_0)|&=|L(D_t^j e,T^j g_0-\chi)|\\&\leq C\inf_{\chi\in S_h}(\|D_t^{j+1}e\|_1\|T^j g_0-\chi\|_1+\|D_t^j e\|_2\|T^j g_0-\chi\|_2)\\&\leq C(h^{r-1}\|D_t^{j+1}e\|_1+h^{r-2}\|D_t^j e\|_2),\end{aligned}$$

这里用到了 $T^j g_0\in C^2(I)\cap C^\infty(I\setminus\{\bar{x}\})\cap H_0^1(I)$的事实.进一步，

$$\begin{aligned}|A(D_t^{n+1}e,T^n g_0)|&=|(T^n D_t^{n+1}e,Ag_0)|\\&\leq C\|D_t^{n+1}e\|_{-2n},\end{aligned}$$

这就完成了(15)的证明。关于$\partial e/\partial x$的证明是类似的。

与形如(14)的适当的估计结合一起，我们可以得到

$$|e(\bar{x},t)|\leq C(t,u)h^{2r-4},\ \text{当}k=1\text{或}2\text{时},$$

和

$$\left|\frac{\partial e}{\partial x}(\bar{x},t)\right|\leq C(t,u)h^{2r-4},\ \text{当}k=1\text{时}.$$

现在，我们转向（1）的H^{-1}方法。这个方法可以看成是一个Galerkin—Petrov方法。这个术语表明试探函数和检验函数是从不同的空间选取的。设$0=x_0<x_1<\cdots<x_M=1$是I的一个剖分，r和k为整数，且满足$r\geq 1$和$-1\leq k\leq r-2$。我们把

$$S_h=\{\chi\in C^k(I);\chi|_{(x_{j-1},x_j)}\in \Pi_{r-1},\ j=1,\cdots,M\}$$

作为试探函数空间（这里，$C^{-1}(I)$解释为$L_2(I)$），而把

$$V_h=\{\omega\in C^{k+2}(I);\omega|_{(x_{j-1},x_j)}\in \Pi_{r+1},\ j=1,\cdots,M;$$
$$\omega(0)=\omega(1)=0\},$$

作为检验函数空间。

注意，对S_h设有指定边界条件，V_h的连续性的阶和多项式的次数均比S_h高两阶。一个有趣的选择是$k=-1$。此时，S_h的函数在剖分的节点处可能间断，而V_h的函数是连续可微的。

我们要讨论的半离散方法为求$u_h:[0,\infty)\to S_h$，使得

$$(16)\quad (u_{h,t},\omega)+(u_h,A\omega)=(f,\omega),\ \forall\omega\in V_h,\ t\geq 0,$$
$$u_h(0)=V_h,$$

其中V_h是V在S_h中给定的近似，而$(\cdot,\cdot)$如通常那样，表示$L_2(I)$中的内积。下面将看到，眼下的方法也可以解释成一个通常的Galerkin方法。然而，它是相对于$H_0^1(I)$的对偶空间的内积，我们称此方法为H^{-1}方法，就是因为这个缘故。

为了说明这一点，我们引进两点边值问题

$$-u''=f,\ 于I内,\ u(0)=u(1)=0,$$

的解算子T_0，并注意$V_h=T_0S_h$。算子T_0在$L_2(I)$上是正定的，因此我们可以定义内积$\langle V,W\rangle=(V,T_0W)$以及相应的范数$|V|=\langle V,V\rangle^{1/2}$。实际上，

(17) $|V|^2=(V,T_0V)=-((T_0V)'',T_0V)$
$$=\|(T_0V)'\|^2$$

同时容易证明

$$C|V|\leq\sup_{W\in H_0^1(I)}\frac{(V,W)}{\|W\|_1}=\sup_{W\in H_0^1(I)}\frac{((T_0V)',W')}{\|W\|_1}$$
$$\leq C|V|,\ C>0,$$

所以，$|\cdot|$是$H_0^1(I)$对偶空间上的一个范数。又令

$$B(V,W)=(V,AT_0W)=(V,aW)+(V,A_1T_0W),$$

其中$A_1V=-a'V'+bV$，那么可将(16)写成通常的Galerkin方法的形式

(18) $\langle u_{h,t},\chi\rangle+B(u_h,\chi)=\langle f,\chi\rangle,\ \forall\chi\in S_h,\ t\geqslant0.$

因为由(17)，

(19) $|(V,AT_0W)|\leq C\|V\|\|T_0W\|_1\leq$
$$C\|V\|\|(T_0W)'\|\leq C\|V\||W|,$$

故有

$$B(u,u)=\|a^{1/2}u\|^2+(u,A_1T_0u)\geqslant C_0\|u\|^2-\kappa|u|^2,$$

经过变量代换$\tilde{u}=e^{-\kappa t}u$以后，方程(18)具有形式

$$\langle\tilde{u}_{h,t},\chi\rangle+B_\kappa(\tilde{u}_h,\chi)=\langle\tilde{f},\chi\rangle,\ \forall\chi\in S_h,$$

其中$B_\kappa(V,W)=B(V,W)+\kappa\langle V,W\rangle$是正定的。我们将假定这个变换在开始就已经实行，因此我们保持方程的原始形式(18)，但是满足

(20) $B(u,u)\geqslant C_0\|u\|^2$。

然而，我们需要记住，这样做在最后结果中可能要添加一个因子$e^{\kappa t}$。

为了分析，引进椭圆投影$Q=Q_h:L_2(I)\to S_h$，它由下式定义

(21) $B(Qu-u,\chi)=0,\ \forall\chi\in S_h,$

Qu的存在性和唯一性可由$B(\cdot,\cdot)$的正定性得到保证。下面引理需要定义

$$\|u\|_{-q}=\sup_{\varphi\in H^q(I)}\frac{(u,\varphi)}{\|\varphi\|_q},$$

以下仅仅用到$q=0$和1的情形。

引理3．对于$0\le q$，$s\le r$，有

(22) $\|Qu-u\|_{-q}\le Ch^{s+q}\|u\|_s$.

证明．已知对于S_h上的标准L_2—投影P_0，有

(23) $\|P_0u-u\|=\inf_{\chi\in S_h}\|u-\chi\|\le Ch^s\|u\|_s$，$0\le s\le r$.

由(20)和(21)，我们得到

$$C_0\|Qu-u\|^2\le B(Qu-u,Qu-u)$$
$$=B(Qu-u,P_0u-u)\le C\|Qu-u\|\|P_0u-u\|,$$

从而，由(23)我们有

$$\|Qu-u\|\le C\|P_0u-u\|\le Ch^s\|u\|_s.$$

为了证明(22)对于$q>0$成立，对于$\varphi\in L_2(I)$定义函数$\psi\in L_2(I)$为方程$AT_0\psi=\varphi$的唯一解。ψ可以这样来找，首先由问题：$A\omega=\varphi$，于I内，$\omega(0)=\omega(1)=0$确定$\omega=T_0\psi$，然后令$\psi=-\omega''$。注意，

$$\|\psi\|_q=\|(T_0\psi)''\|_q\le C\|T_0\psi\|_{q+2}\le C\|\varphi\|_q.$$

现在，我们有

$$|(Qu-u,\varphi)|=|(Qu-u,AT_0\psi)|=|B(Qu-u,\psi)|$$
$$=|B(Qu-u,\psi-P_0\psi)|\le C\|Qu-u\|\|\psi-P_0\psi\|$$
$$\le Ch^{s+q}\|u\|_s\|\psi\|_q,$$

这就完成了定理的证明。

下面，我们就开始对抛物问题作误差分析，首先对光滑解情形建立一个误差估计。

定理4．设u_h和u分别是(16)和(1)的解，则对于每个

$T>0$，存在常数$C=C_T$，使得对$t\in[0,T]$有

$$\|u_h(t)-u(t)\|\leq C\|V_h-V\|+Ch^r\{\|V\|_r$$
$$+\|u(t)\|_r+\left(\int_0^t\|u_t(s)\|_{r-1}^2ds\right)^{1/2}\}$$

证明。令

(24) $\quad u_h-u=(u_h-Qu)+(Qu-u)=\theta+\rho$。

由引理3，立即可知

$$\|\rho(t)\|=\|Qu(t)-u(t)\|\leq Ch^r\|u(t)\|_r。$$

根据定义和标准记法，我们有

(25) $\quad \langle\theta_t,\chi\rangle+B(\theta,\chi)=-\langle\rho_t,\chi\rangle,\ \forall\chi\in S_h$。

取$\chi=\theta_t$并注意由(19)有

$$B(\theta,\theta_t)=(\theta,a\theta_t)+(\theta,A_1T_0\theta_t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|a^{1/2}\theta\|^2$$

$$+(\theta,A_1T_0\theta_t)\geqslant\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|a^{1/2}\theta\|^2-C\|a^{1/2}\theta\||\theta_t|,$$

由此得

$$|\theta_t|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|a^{1/2}\theta\|^2=-\langle\rho_t,\theta_t\rangle-(\theta,A_1T_0\theta_t)$$

$$\leq C(|\rho_t|^2+\|a^{1/2}\theta\|^2)+|\theta_t|^2,$$

或者

(26) $\quad \frac{d}{dt}\|a^{1/2}\theta\|^2\leq C(|\rho_t|^2+\|a^{1/2}\theta\|^2)$。

于是，由Gronwall引理，

$$\|a^{1/2}\theta(t)\|^2\leq e^{ct}\|a^{1/2}\theta(0)\|^2+C\int_0^t e^{(t-s)c}|\rho_t(s)|^2ds,$$

或者，对有限的t，

$$\|\theta(t)\|\leq C\{\|\theta(0)\|+(\int_0^t|\rho_t|^2ds)^{1/2}\}。$$

这里，利用引理3，有

$$\|\theta(0)\|=\|V_h-QV\|\le\|V_h-V\|+Ch^r\|V\|_r,$$

和

$$|\rho_t|\le C\|\rho_t\|_{-1}\le Ch^r\|u_t\|_{r-1},$$

于是

$$\left(\int_0^t|\rho_t|^2ds\right)^{1/2}\le Ch^r\left(\int_0^t\|u_t\|_{r-1}^2ds\right)^{1/2}.$$

综合以上估计，即证明了定理。

对于齐次方程的特殊情形，我们有下面的结果。这里象在第三章里那样，$\dot{H}^r(I)$表示由模

$$\|V\|_{\dot{H}^r(I)}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^r(V,\varphi_j)^2\right)^{1/2}$$

所定义的空间，其中$\{\lambda_j\}_1^\infty$和$\{\varphi_j\}_1^\infty$是A满足边界条件$\varphi_j(0)=\varphi_j(1)=0$的特征值和特征向量。

定理5. 设u_h和u分别是(16)和(1)的解，假定$V\in\dot{H}^r(I)$和$f=0$，则有

$$\|u_h(t)-u(t)\|\le C\|V_h-V\|+Ch^r\|V\|_r,\quad t\le T.$$

其中$C=C_T$依赖于T。

证明。此定理的结论可由定理4立即导出，这里如同第三章，只要注意到

$$\|u(t)\|_r^2\le C\|u(t)\|_{\dot{H}^r(I)}=C\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^re^{-2\lambda_it}(V,\varphi_i)^2$$

$$\le C\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^r(V,\varphi_i)^2=C\|V\|^2_{\dot{H}^r(I)}\le c\|V\|_r^2,$$

和

$$\int_0^t\|u_t\|_{r-1}^2\,ds\le\int_0^t\|u\|_{r+1}^2\,ds$$

$$\leq C\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{\gamma+1}e^{-2\lambda_j s}\quad(V,\varphi_j)^2ds$$

$$\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{\gamma+1}(V,\varphi_j)^2\int_0^{\infty}e^{-2\lambda_j s}ds=C\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{\gamma}(V,\varphi_j)^2$$

$$\leq C\|V\|_{\gamma}^2.$$

我们以证明如下非光滑初值的误差估计来结束这一章。

定理 6．设u_h和u分别是(16)和(1)的解，并假设$V_h=P_0V$和$f=0$，则有$(C=C_T)$

$$\|u_h(t)-u(t)\|\leq Ch^{\gamma}t^{-\gamma/2}\|V\|,\ 0<t\leq T.$$

证明。下面我们证明

$$\|u_h(t)-u(t)\|\leq Cht^{-1/2}\|V\|,\ 0<t\leq T.$$

和第三章完全一样，通过一个迭代论证，由此即可证明期望的结果。

仍然将误差分成(24)中那样的两项，同时注意由引理3和标准的谱方法，

$$\|\rho(t)\|\leq Ch\|u(t)\|_1\leq Cht^{-1/2}\|V\|,\ t\leq T.$$

为推导对θ所需要的估计，首先利用误差方程(25)证明

$$(27)\quad t^2\|\theta(t)\|^2\leq C\{t|\theta(0)+\rho(0)|^2+\int_0^t(s^2|\rho_t|^2+|\rho|^2)ds\},$$

然后注意到由此可以导出

$$(28)\quad t^{1/2}\|\theta(t)\|\leq Ch\|V\|,\ t\leq T,$$

这样就完成了定理的证明。

为了证明(27)式，首先用t^2乘(26)，得

$$\frac{d}{dt}(t^2\|a^{1/2}\theta\|^2)\leq Ct^2|\rho_t|^2+Ct\|a^{1/2}\theta\|^2,$$

对t积分之后，则得

$$(29)\quad t^2\|\theta(t)\|^2 \leq C\int_0^t s^2|\rho_t|^2 ds + C\int_0^t s\|\theta\|^2 ds.$$

为了估计后一个积分，我们在(25)中取$\chi=\theta$，然后乘以t，由此导出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(t|\theta|^2)+tB(\theta,\theta)=-t\langle\rho_t,\theta\rangle+\frac{1}{2}|\theta|^2$$

$$\leq Ct^2|\rho_t|^2+C|\theta|^2,$$

再利用(20)式，得到

$$(30)\quad \int_0^t s\|\theta\|^2 ds \leq C\int_0^t s^2|\rho_t|^2 ds + C\int_0^t |\theta|^2 ds.$$

为了估计后面那项，现在对t积分(25)以得

$$\langle\theta(t),\chi\rangle+B(R,\chi)=\langle\theta(0),\chi\rangle+\langle\rho(0)-\rho(t),\chi\rangle$$

$$=\langle\psi(t),\chi\rangle,$$

其中$R(t)=\int_0^t \theta(s)ds, \psi(t)=\theta(0)+\rho(0)-\rho(t)$，选取$\chi=\theta(t)=R_t(t)$，得到

$$|\theta|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|a^{1/2}R\|^2=\langle\psi,\theta\rangle-(R,A_1T_0\theta),$$

从而，由(19)有

$$|\theta|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|a^{1/2}R\|\leq|\psi||\theta|+C\|R\||\theta|,$$

或者 $|\theta|^2+\frac{d}{dt}\|a^{1/2}R\|^2\leq C(|\psi|^2+\|a^{1/2}R\|^2).$

由于$R(0)=0$，现在由Gronwall 引理有

$$\int_0^t|\theta|^2 ds\leq C\int_0^t|\psi|^2 ds,\quad t\leq T$$

这个估计与(29)和(30)结合起来给出

$$t^2\|\theta(t)\|^2\leq C\int_0^t(s^2|\rho_t|^2+|\psi|^2)ds$$

$$\leq Ct|\theta(0)+\rho(0)|^2+C\int_0^t(s^2|\rho_t|^2+|\rho|^2)ds,$$

此即(27)式。

现在

$$|\theta(0)+\rho(0)|=|V_h-V|\leq C\|P_0V-V\|_{-1}$$

并且由于P_0是自共轭的，

$$\|P_0V-V\|_{-1}=\sup_{\varphi\in H^1(I)}\frac{(P_0V-V,\varphi)}{\|\varphi\|_1}=$$

$$\sup_{\varphi\in H^1(I)}\frac{(V,(P_0-I)\varphi)}{\|\varphi\|_1}\leq\|V\|\sup_{\varphi\in H^1(I)}\frac{\|P_0\varphi-\varphi\|}{\|\varphi\|_1}$$

$$\leq Ch\|V\|,$$

于是

$$(31)\qquad |\theta(0)+\rho(0)|\leq Ch\|V\|.$$

进一步，再一次应用引理3以及(1)的解算子的稳定性，我们有

$$|\rho(s)|\leq Ch\|u(s)\|\leq Ch\|V\|,$$

又由解算子的光滑性质知道

$$s|\rho_t(s)|\leq Chs\|u_t(s)\|\leq Ch\|V\|,$$

从而，

$$\int_0^t(s^2|\rho_t(s)|^2+|\rho(s)|^2)ds\leq Ch^2t\|V\|^2$$

这样，由(27)和(31)我们可结论，对于有界的t，

$$t\|\theta(t)\|^2\leq Ch^2\|V\|^2,$$

这就是(28)式。定理证毕。

结尾，我们指出，这里的L_2误差估计，虽然从外观上看类似于我们前面的L_2估计，但从其性质来说，是不相同的。对于目下情形，与前面结果类似的应该是H^{-1}—模估计，这里的结果应该看成是与标准Galerkin方法的H^{-1}估计

相对应的。

参 考 文 献

H^1方法首先是在〔1〕中对于半线性问题提出的，并且在〔2〕和〔3〕中作了进一步的分析。H^{-1}方法是在〔4〕中引进的。这里的分析是取自〔5〕。

1. V. Thomee and L. B. Wahlbin, On Galerkin methods in semilinear parabolic problems. SIAM J. Numer. Anal. 12, 378－389(1975).

2. J. Douglas, Jr., T. Dupont and M. F. Wheeler, Some superconvergence results for an H^1 Galerkin procedure for the heat equation. Lecture notes in Computer Science, Vol. 10, Springer－Verlag, New York, pp. 288－311(1974).

3. J. Douglas, Jr., T. Dupont and M. F. Wheeler, H^1—Galerkin methods for the Laplace and heat equations. Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, ed. C. de Boor, Academic Press, pp. 383－416(1974).

4. M. F. Wheeler, An H^{-1} Galerkin method for a parabolic problem in a single space variable. SIAM J. Numer. Anal. 12, 803－817(1975).

5. M. Huang and V. Thomée, An error estimate for the H^{-1} Galerkin method for a parabolic problem with non－smooth initial data. Calcolo 19, 115－124 (1982).

第十三章　一个混合方法

在这一章里，我们将讨论模型抛物方程的一个有限元法，它是基于问题的一种混合的陈述。在这种陈述中，解的梯度作为独立的函数变量被引进，其近似是在一个不同于解自身的有限元空间中寻求的。这个方法的优点在于解的梯度是按解自身的精度阶加以近似的。

设Ω是一个具光滑边界的凸的平面区域。我们首先考虑定常问题

$$(1)\qquad \begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad &\text{于}\Omega\text{内},\\ u &= 0, \quad &\text{在}\partial\Omega\text{上}, \end{aligned}$$

若引进解u的梯度作为新的变量，则问题(1)又可以表示成

$$(2)\qquad \begin{aligned} -div\sigma &= f, \quad &\text{于}\Omega\text{内},\\ \sigma &= \nabla u, \quad &\text{于}\Omega\text{内},\\ u &= 0, \quad &\text{在}\partial\Omega\text{上}. \end{aligned}$$

记$L_2=L_2(\Omega)$和$H=\{w=(w_1,w_2)\in L_2^2; \ divw\in L_2\}$，则$(u,\sigma)\in L_2\times H$也是如下变分问题的解

$$(3)\qquad \begin{aligned} (div\,\sigma,\varphi)+(f,\varphi) &= 0, \quad &\forall\varphi\in L_2,\\ (\sigma,w)+(u,divw) &= 0, \quad &\forall w\in H, \end{aligned}$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示相应的L_2内积。注意，边界条件$u=0$隐含在方程(3)中。用n表示$\partial\Omega$的外法线方向，由Green公式有

$$(\sigma,w)=-(u,\,div\,w)=-\int_{\partial\Omega}uw\cdot nds+(\nabla u,w),\ \forall w\in H,$$

从而，形式地于Ω内$\sigma=\nabla u$和在$\partial\Omega$上$u=0$。

设S_h和H_h分别是L_2和H的有限维子空间，我们将考虑

(2)（或(3)）的如下半离散近似，即求$(u_h,\sigma_h)\in S_h\times H_h$，使得

$$(4)\quad (\mathrm{div}\sigma_h,\chi)+(f,\chi)=0,\quad \forall\chi\in S_h,$$
$$(\sigma_h,\psi)+(u_h,\mathrm{div}\psi)=0\quad \forall\psi\in H_h.$$

现在，我们来描述子空间S_h和H_h的选择；它们属于由Raviart和Thomas〔1〕所引进的一对空间族。

设$\mathscr{T}_h$是反复用过的Ω的拟一致三角形剖分（参见第一章），并令

$S_h=\{\chi\in L_2;\chi|_\tau$为线性，$\forall\tau\in\mathscr{T}_h$，于$\Omega\setminus\Omega_h$内，$\chi=0\}$，

这里，没有加跨过内部单元边界的连续性要求。为了定义H_h，令$\hat{\tau}$是ξ—平面上标准参考单元，其顶点为$P_0=(0,0)$，$P_1=(1,0)$和$P_2=(0,1)$，并令$\hat{H}$代表$\hat{\tau}$上由$\hat{\psi}=(\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2)\in\Pi_2^2$作成的空间，这里

$$(5)\quad \hat{\psi}_1=\alpha_0+\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3(\xi_1^2+\xi_1\xi_2),$$
$$\hat{\psi}_2=\beta_0+\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2+\beta_3(\xi_1\xi_2+\xi_2^2).$$

其中(α_j,β_j)，$j=0,1,2,3$，为实数。对于$\tau\in\mathscr{T}_h$，设F_τ是从$\hat{\tau}$到τ的一个仿射变换，

$$x=F_\tau(\xi)=B_\tau\xi+b_\tau,$$

其中B_τ是2×2阶矩阵，$b_\tau\in R^2$，再设

$$H(\tau)=\{\psi=B_\tau\hat{\psi}\circ F_\tau^{-1},\ 其中\hat{\psi}\in\hat{H}\}.$$

对于具有两个顶点在$\partial\Omega$上的三角形$\tau\in\mathscr{T}_h$，我们定义$\tilde{\tau}$是τ自然扩张的具有一条曲边的三角形，对于$\mathscr{T}_h$中其余三角形则令$\tilde{\tau}=\tau$。然后，定义

$$H_h=\{\psi=(\psi_1,\psi_2)\in H;\ \psi|_{\tilde{\tau}}\in\Pi_2^2,\psi|_\tau\in H(\tau),\forall\tau\in\mathscr{T}_h\}.$$

则此空间由剖分$\mathscr{T}_h$上分片二次多项式所组成，它们具有由$H(\tau)$的定义所隐含的特定形式，对于曲边三角形，这些多项式延拓至曲边界。

让我们注意，若$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$和$\hat{\varphi}=(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2)$分别定义在$\tau$和$\hat{\tau}$上，并具有$H(\tau)$的定义中所述的关系，则$\varphi(F_\tau(\xi))=B_\tau\varphi(\xi)$，于是它们的法向分量在相应的边界上是成比例的。事实上，若$\hat{n}$是$\hat{\tau}$的某条边$\hat{\delta}$上的法向量，则

$$\hat{\varphi}\cdot\hat{n}=B_\tau^{-1}\varphi\cdot\hat{n}=\varphi\cdot\tilde{n}\text{，其中 }\tilde{n}=(B_\tau^{-1})^T\hat{n}.$$

其次，若$\hat{V}$是$\hat{\delta}$上的一个向量，则它在τ的相应边δ上的映象为$B_\tau\hat{V}$，且

$$(B_\tau\hat{V})\cdot\tilde{n}=\hat{V}\cdot(B_\tau^T\tilde{n})=\hat{V}\cdot\hat{n}=0,$$

于是$\tilde{n}$是δ的法向量。

从(5)看出$H(\tau)$的维数是8，$\psi\cdot n$在τ的每条边上两个点处的值（6个条件），再加上ψ_1和ψ_2在τ上的平均值（两个条件）可以取作这个空间的自由度。按通常的方法，为了证明这些值唯一地决定$H(\tau)$中的一个元素，只需证明唯一性就够了。为此目的，首先注意ψ的法向分量在$\partial\Omega$上是线性的，这是因为，从上面我们知道，在参考三角形上此事实为真，并于其上有

$$\hat{\psi}\cdot\hat{n}=\begin{cases}-\hat{\psi}_2=-\beta_0-\beta_1\xi_1, & \text{在 } p_0p_1 \text{ 上，}\\ -\hat{\psi}_1=-\alpha_0-\alpha_2\xi_2, & \text{在 } p_0p_2 \text{ 上，}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\psi}_1+\hat{\psi}_2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{(\alpha_0+\beta_0+\alpha_2+\beta_2+\beta_3) & \\ \quad+(\alpha_1+\beta_1-\alpha_2-\beta_2+\alpha_3-\beta_3)\xi_1\}, & \text{在 } p_1p_2 \text{ 上。}\end{cases}$$

特别地，若$\psi\cdot n$在τ的每条边上两点处的值等于0，则同样的事实对于$\hat{\psi}\cdot\hat{n}$在$\hat{\tau}$的边界$\partial\hat{\tau}$上也成立，并且有

$$\alpha_0=\beta_0=\alpha_2=\beta_1=\alpha_1+\alpha_3=\beta_2+\beta_3=0,$$

于是$\hat{\psi}$简化为

$$\hat{\psi}_1=\alpha_1\xi_1(1-\xi_1-\xi_2),\qquad \hat{\psi}_2=\beta_2\xi_2(1-\xi_1-\xi_2).$$

由于ξ_1，ξ_2和$1-\xi_1-\xi_2$在$\hat{\tau}$上是正的，所以，当$\hat{\psi}_1$和$\hat{\psi}_2$在

$\hat{\tau}$ 上的平均值等于0时，还有$\alpha_1=\beta_2=0$，从而于$\hat{\tau}$内$\hat{\psi}\equiv 0$和于τ内$\psi\equiv 0$。

为了进一步地阐明H_h的定义，我们回忆在H_h的定义中，$\chi\in H_h$的条件是要求$\operatorname{div}\chi\in L_2$，并注意，这等价于要求$\chi\cdot n$在跨过内部单元边界时是连续的。事实上，若$\operatorname{div}\chi\in L_2$，则

$$(\operatorname{div}\chi,\varphi)=-(\chi,\nabla\varphi),\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

另一方面，考虑具有一条公共边的两个相邻三角形τ_1和τ_2，并设φ的支集含于它们的并集内，分别在每个三角形上应用Green公式，可以得到

$$(\operatorname{div}\chi,\varphi)=\int_{\partial\tau_1}(\chi\cdot n)\varphi cs+\int_{\partial\tau_2}(\chi\cdot n)\varphi\, ds-(\chi,\nabla\varphi).$$

此式表明，在τ_1和τ_2的公共边的两侧，$\chi\cdot n$的值除符号外是一致的。

总之，我们得到结论：$\psi\cdot n$在$\mathscr{T}_h$的每条边上两点处的值和ψ在所有三角形上的平均值唯一地确定H_h的一个元素ψ。

我们首先是要证明定常问题的如下误差估计。

定理1. 离散问题(4)具有唯一解$(v_h,\sigma_h)\in S_h\times H_h$，令$(u,\sigma)=(u,\nabla u)$是(2)的解，则有

$$\|u_h-u\|\leqslant Ch^2\|u\|_2,$$

和

$$\|\sigma_h-\sigma\|\leqslant Ch^s\|u\|_{s+1},\qquad s=1,2.$$

定理的证明要求某些准备工作。在下面的引理1中，我们构造一个有用的插值算子。

引理1. 存在一个线性算子$Q=Q_h$: $H\to H_h$，使得

(6) $(\operatorname{div}Qw,\chi)=(\operatorname{div}w,\chi)$，$\forall\chi\in S_h$，$w\in H$，

(7) $\|Qw-w\|\leqslant Ch^s\|w\|_s$，$\quad s=1,2$，

和

(8) $\|Qw\|\leqslant C\|w\|_1$.

证明　我们定义如下 Q,

(9) $\int_\delta (Qw-w)\cdot nds=\int_\delta s(Qw-w)\cdot nd=0$,

对于$\mathscr{T}_h$的每一条边δ,

和

(10) $\int_\tau (Qw-w)dx=0$,　对于每个$\tau\in\mathscr{T}_h$.

由前面的讨论容易看出，用上述条件可以在每个$\tau\in\mathscr{T}_h$上定义Qw，从而由延拓，在每个$\bar{\tau}$上也有定义，同时所得的Qw属于H_h。

第一个性质(6)可由在每个τ上应用 Green 公式导出：因为χ是线性的，则$\nabla\chi$是常数，于是条件(9)和(10)表明

$$\int_\tau \mathrm{div}\ (Qw-w)\chi dx$$

$$=\int_{\partial\tau}\chi(Qw-w)\cdot nds-\int_\tau \nabla\chi\cdot(Qw-w)dx=0.$$

由于在Ω_h的外边$\chi=0$，故(6)成立。引理的第二个论断可由Bramble－Hilbert引理（例如可参看[4]）得证，因为在每个τ上Q显然是再生线性函数，并且在参考三角元上引理要求的有界性条件是满足的，即

$$\|w\|_{L_2(\partial\hat{\tau})}+\|w\|_{L_2(\hat{\tau})}\leqslant C\|w\|_{H^s(\hat{\tau})},\ s=1,2.$$

最后，不等式(8)可由(7)立即推出。

在下一个引理中，我们证明一个稳定性结果，在下面关于存在性和唯一性的证明中需要这个结果。

引理2.　存在一个常数C，使得对于$V_h\in S_h$和满足下式的$w=(w_1,w_2)\in L_2^2$,

(11) $(w,\psi)+(V_h,\operatorname{div}\psi)=0$， $\forall\psi\in H_h$，

有

(12) $\|V_h\|\leqslant C\|w\|$。

证明 设$\varphi\in L_2$和g是下述问题的解，

(13) $-\Delta g=\varphi$， 于Ω内， $g=0$， 在$\partial\Omega$上.

那末，利用(6)和(11)，可得

$$(V_h,\varphi)=-(V_h,\operatorname{div}\nabla g)=-(V_h,\operatorname{div}Q\nabla g)=(w,Q\nabla g),$$

因此由(8)和标准的椭圆正则性估计，有

$$|(V_h,\varphi)|\leqslant\|w\|\|Q\nabla g\|\leqslant C\|w\|\|\nabla g\|_1$$
$$\leqslant C\|w\|\|g\|_2\leqslant C\|w\|\|\varphi\|,$$

即(12)式成立，引理证完。

要注意，在每个$\tau\in\mathscr{T}_h$上，对于$\psi\in H_h$有$\operatorname{div}\psi\in\Pi_1$，故$\operatorname{div}\psi$在$\Omega_h$上的限制等同于$S_h$中的一个元素。然而，由于$\Omega\neq\Omega_h$，一般说来$\operatorname{div}\psi$并不属于$S_h$，但属于

$$\tilde{S}_h=\{\tilde{\chi}\in L_2:\tilde{\chi}|_\tau\in\Pi_1,\forall\tau\in\mathscr{T}_h\}.$$

在下述引理中，我们将考虑往S_h上的L_2投影算子P_0的一个修正$\tilde{P}_0$，此算子是以$\tilde{S}_h$为检验空间。

引理3. 设$\tilde{P}_0:L_2\to S_h$由下式定义

(14) $(\tilde{P}_0V,\tilde{\chi})=(V,\tilde{\chi})$， $\forall\tilde{\chi}\in\tilde{S}_h$，

则

$$\|\tilde{P}_0V-V\|\leqslant Ch^2\|V\|_2，当在\partial\Omega上V=0时。$$

证明 首先注意(14)式在S_h上唯一地确定$\tilde{P}_0V$，因为于Ω/Ω_h内$\tilde{P}_0V=0$，所以若$V=0$，则有

$$(\tilde{P}_0V,\chi)=0,\quad\forall\chi\in S_h.$$

熟知

(15) $\|P_0V-V\|\leqslant Ch^2\|V\|_2$，

这样，为了证明引理的估计，我们把$\tilde{P}_0$与P_0作一比较。为

此，对于$\chi\in S_h$，令$\tilde{\chi}$代表它在$\tilde{S}_h$中的关联元素，$\tilde{\chi}$与χ在Ω_h上是等同的。由(14)有

$$(\tilde{R}_0V-P_0V,\ \chi)=(\tilde{R}_0V,\ \tilde{\chi})-(P_0V,\chi)$$
$$=(V,\tilde{\chi}-\chi)$$
$$=\int_{\Omega/\Omega_h}V\ \tilde{\chi}dx\leqslant\|V\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_h)}\ \ \|\tilde{\chi}\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_h)}.$$

注意，对τ和h一致地有

$$\|\tilde{\chi}\|_{L_2}(\tilde{\tau}\setminus\tau)\leqslant C\|\tilde{\chi}\|_{L_2(\tau)},\ \forall\tilde{\chi}\in\tilde{S}_h.$$

因此

$$\|\tilde{\chi}\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_h)}\leqslant C\|\tilde{\chi}\|_{L_2\ \ (\Omega_h)}=C\|\chi\|,$$

这表明

$$\|\tilde{P}_0V-P_0V\|\leqslant C\|V\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega h)}.$$

由于对$\Omega\setminus\Omega_h$的每个点x，$\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)\leqslant Ch^2$，所以，若$V$在$\partial\Omega$上为零，则有

$$\|V\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_h)}\leqslant Ch^2\|\Delta V\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_h)}\leqslant Ch^2\|V\|_1,$$

对于如此之V可以结论

$$\|\tilde{P}_0V-P_0V\|\leqslant Ch^2\|V\|_1.$$

此与(15)式一起即完成了引理的证明。

下述最后一个引理是关于u_h的误差估计证明的主要组成部分。

引理4．　存在一个常数C，使得对于满足

(16)　$(w,\psi)+(V_h,\mathrm{div}\psi)=0$，　$\forall\psi\in H_h$，

(17)　$(\mathrm{div}w,\ \chi)=0$，　$\forall\chi\in S_h$，

的$V_h\in S_h$和$w\in H$，有

(18)　$\|V_h\|\leqslant C\{h\|w\|+h^2\|\mathrm{div}w\|\}$.

证明　如同在引理2的证明中那样，对于$\varphi\in L_2$，令g是(13)的解。则由(6)和(16)有

$$(V_h,\varphi)=-(V_h,\mathrm{div}\nabla g)=-(V_h,\ \mathrm{div}Q\nabla g)=(w,Q\nabla g)$$
$$=(w,Q\nabla g-\nabla g)+(w,\nabla g)=I_1+I_2.$$

这里，由引理 1 和椭圆正则性估计，

$$|I_1|\leqslant\|w\|\|Q\nabla g-\nabla g\|\leqslant Ch\|w\|\|\nabla g\|_1\leqslant Ch\|w\|\|\varphi\|,$$

再利用Green公式和(17)有

$$I_2=-(\mathrm{div}w,g)=(\mathrm{div}w,\tilde{P}_0g-g),$$

于是由引理 3，

$$|I_2|\leqslant\|\mathrm{div}w\|\|\tilde{P}_0g-g\|\leqslant Ch^2\|\mathrm{div}w\|\|g\|_2\leq Ch^2\|\mathrm{div}w\|\|\varphi\|.$$

综合起来，有

$$|(V_h,\varphi)|\leq C(h\|w\|+h^2\|\mathrm{div}w\|)\|\varphi\|,$$

由此证明了(18)式，从而引理得证。

现在已经作好了证明定理 1 的准备。

定理 1 的证明 为了证明存在性，象通常那样，只需证明唯一性。为此，令$f=0$。在(4)中令$\chi=u_h$和$\psi=\sigma_h$，得到

$$\|\sigma_h\|^2=-(u_h,\ \mathrm{div}\sigma_h)=0,$$

于是$\sigma_h=0$. 由引理 2，我们可以结论$u_h=0$，这就证明了唯一性。

在误差分析中，我们将从$\sigma_h-\sigma$的估计开始。根据(7)式，只要证明

(19) $\|\sigma_h-\sigma\|\leq\|Q\sigma-\sigma\|$

就够了。为此注意由(6)，(3)和(4)，对于$\chi\in S_h$，我们有

$$(\mathrm{div}(Q\sigma-\sigma_h),\chi)=(\mathrm{div}\sigma,\chi)-(\mathrm{div}\sigma_h\chi)$$
$$=-(f,\chi)+(f,\chi)=0.$$

这样，在Ω_h上，$\mathrm{div}\,(Q\sigma-\sigma_h)$等于0，又因它在每个$\tau$上是线性的，所以在$\Omega$上亦为0. 但是，由(3)和(4)式，有

(20) $(\sigma_h-\sigma,\psi)+(u_h-u,\ \mathrm{div}\psi)=0,\qquad\forall\psi\in H_h,$

于是，特别地对$\psi=Q\sigma-\sigma_h$，有

$$(\sigma_h-\sigma,\sigma_h-Q\sigma)=0\text{ .}$$

从而

$$\|\sigma_h-\sigma\|^2=(\sigma_h-\sigma,Q\sigma-\sigma)\leq\|\sigma_h-\sigma\|\|Q\sigma-\sigma\|,$$

这就证明了(19)式。

为了估计$\|u_h-u\|$，我们注意$\operatorname{div}\psi\in\tilde{S}_h$，对$\psi\in H_h$.则由定义(14)有

$$(u,\operatorname{div}\psi)=(\tilde{P}_0u,\operatorname{div}\psi),\quad\forall\psi\in H_h,$$

因此由(20)有，

$$(\sigma_h-\sigma,\psi)+(u_h-\tilde{P}_0u,\operatorname{div}\psi)=0\text{ },\quad\forall\psi\in H_h.$$

其次，由于

(21) $(\operatorname{div}(\sigma_h-\sigma),\chi)=0\text{ },\forall\chi\in S_h,$

所以由引理 4 可以结论

(22) $\|u_h-\tilde{P}_0u\|\leq C\{h\|\sigma_h-\sigma\|+h^2\|\operatorname{div}(\sigma_h-\sigma)\|\}.$

由前面已知

$$\|\sigma_h-\sigma\|\leq Ch\|u\|_2.$$

另外，通过分别考虑每个边界三角形，可以证明

$$\|\operatorname{div}\sigma_h\|\leq C\|\operatorname{div}\sigma_h\|_{L_2(\Omega_h)}.$$

于是，在(21)中取$\chi=\operatorname{div}\sigma_h|_{\Omega_h}\in S_h$，即可得到

$$\|\operatorname{div}\sigma_h\|\leq C\|\operatorname{div}\sigma\|\leq C\|u\|_2,$$

此式与(22)一起证得

$$\|u_h-\tilde{P}_0u\|\leq Ch^2\|u\|_2,$$

再根据引理 3，这就完成了定理的证明。

将上述证明精细化，可以得到关于解的第一个分量u的一个几乎最佳阶的最大模误差估计，即

$$\|u_h-u\|_{L_\infty(\Omega)}\leq Ch^2\log\frac{1}{h}\|u\|_3.$$

这里，我们就不给出证明的细节了。

我们可以这样想象，(4)带有$f\in L_2$的解$(u_h,\sigma_h)\in S_h\times H_h$是由$T_hf=u_h, R_hf=\sigma_h$所定义的算子对$(T_h, R_h): L_2\to S_h\times H_h$作用在$f$上的结果。借助连续问题(1)的解算子$T: L_2\to H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$，我们来说明$T_h$满足前些章的条件$(i)$和$(ii)$。

引理5. 由$T_hf=u_h$所定义的算子$T_h: L_2\to S_h$，在L_2上是自共轭和半正定的，并且于S_h上是正定的。其次，有

$$\|T_hf-Tf\|\leq ch^2\|f\|。$$

证明 离散问题可以写成

$$(23)\quad (\mathrm{div}R_hf,\chi)=-(f,\chi),\quad \forall\chi\in S_h),$$
$$(R_hf,\psi)+(T_hf,\mathrm{div}\psi)=0,\quad \forall\psi\in H_h.$$

由这些关系，我们有

$$(f,T_hg)=-(\mathrm{div}R_hf,T_hg)=(R_hf,R_hg),\forall f,\ g\in L_2,$$

这表明T_h在L_2上是自共轭和半正定的。现在，令$f_h\in S_h$使得$T_hf_h=0$，则由(23)式有$R_hf_h=0$，故

$$\|f_h\|^2=-(f_h,\mathrm{div}R_hf_h)=0,$$

于是$f_h=0$，这表明T_h在S_h上是正定的。这样一来，由定理1立即可知要证的误差估计成立。

现在，我们转向抛物问题

$$u_t-\Delta u=f,\qquad 于\Omega\times(0,\infty)内,$$
$$u=0,\qquad 在\partial\Omega\times[0,\infty)上,$$
$$u(\cdot,0)=V,\qquad 于\Omega内。$$

再次引进$\sigma=\nabla u$，则函数对$(u,\sigma)\in L_2\times H$满足

$$(u_t,\varphi)-(\mathrm{div}\sigma,\varphi)=(f,\varphi),\forall\varphi\in L_2,t\geq 0,$$
$$(24)\quad (\sigma,w)+(u,\mathrm{div}w)=0,\quad \forall w\in H,\ t\geq 0,$$
$$u(0)=V,$$

这引导我们考虑如下的半离散问题：求$(u_h,\sigma_h)\in S_h\times H_h$，

使得

$$(25)\quad (u_{h,t}, \chi) - (\operatorname{div}\sigma_h, \chi) = (f, \chi), \forall \chi \in S_h, t \geqslant 0,$$
$$(\sigma_h, \psi) + (u_h, \operatorname{div}\psi) = 0, \quad \forall \psi \in H_h, \quad t \geqslant 0,$$
$$u_h(0) = V_h,$$

其中V_h是V在S_h中的某种近似。注意，$\sigma_h(0)$可由$u_h(0)$通过(25)中的第二个方程确定。

引进S_h和H_h的基底，这个问题可以写成矩阵形式

$$AU_t - B\Sigma = F,$$
$$B^T U + D\Sigma = 0,$$

$U(0)$是给定的，U和Σ是相应于u_h和σ_h的向量，A和D是正定矩阵。从中消去Σ之后，则可得关于U的一个线性常微分方程组，其中U_t的系数是一个正定矩阵，所以这个方程组对于$t \geqslant 0$存在唯一解。

回忆算子T_h的定义，我们的问题也可以写成

$$(26)\quad T_h u_{h,t} + u_h = T_h f, \quad t \geqslant 0,$$
$$u_h(0) = V_h,$$

由于T_h在S_h上是正定的，此方程再次说明(25)存在唯一解u_h:$[0, \infty) \to S_h$。一旦u_h被确定，σ_h可由(25)的第二个方程求出。结合连续问题的相应形式

$$(27)\quad Tu_t + u = Tf, \quad t \geqslant 0,$$
$$u(0) = V,$$

半离散问题的算子表示式(26)如同在第二、三和六章中一样可以用来推导u_h的误差估计，并象在第七和第八章里那样，它还可以用来陈述相应的全离散格式。

下面的第一个结果，是用能量法导出非齐次方程的误差估计。这个方法的优点是对u_h和σ_h的误差同时加以分析。在此分析中，我们要用到精确解的适应现在情形的一个

椭圆投影，这里我们把它定义为函数对

(28) $(\tilde{u}_h,\tilde{\sigma}_h)=(-T_h\Delta u,\ -R_h\Delta u)\in S_h\times H_h$,

这就是以$(u,\nabla u)$为精确解的椭圆问题的离散解。我们还要把离散初值取为$\tilde{u}_h(0)$，它可以被想象成往S_h上的通常椭圆投影$P_1V=-T_h\Delta V$。

定理2. 设 $V_h=P_1V=-T_h\Delta V$，并令$(u_h,\ \sigma_h)$和$(u,\sigma)=(u,\nabla u)$分别是(25)和(24)的解，则对$t\geqslant 0$有

(29) $$\|u_h(t)-u(t)\|\leq Ch^2\left\{\|u(t)\|_2+\int_0^t\|u_t\|_2\,ds\right\},$$

和

(30) $$\|\sigma_h(t)-\sigma(t)\|\leq Ch^2\left\{\|u(t)\|_3+\left(\int_0^t\|u_t\|_2^2\,ds\right)^{1/2}\right\}.$$

证明 设$(\tilde{u}_h,\tilde{\sigma}_h)$由(28)定义，令

$$\theta=u_h-\tilde{u}_h,\ \rho=\tilde{u}_h-u,\ \varepsilon=\sigma_h-\tilde{\sigma}_h.$$

由定理1可知

$$\|\rho(t)\|=\|\tilde{u}_h(t)-u(t)\|\leq Ch^2\|u(t)\|_2$$

和

(31) $$\|\tilde{\sigma}_h(t)-\sigma(t)\|\leq Ch^2\|u(t)\|_3.$$

所以，剩下的只须估计θ和ε。

利用变分陈述，我们有误差方程

(32) $$(\theta_t,\chi)-(\mathrm{div}\varepsilon,\chi)=-(\rho_t,\chi),\quad \forall\chi\in S_h,$$
$$(\varepsilon,\psi)+(\theta,\mathrm{div}\psi)=0,\quad \forall\psi\in H_h.$$

令$\chi=\theta,\psi=\varepsilon$，并将两式相加，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2+\|\varepsilon\|^2=-(\rho_t,\theta).$$

由于$\theta(0)=0$，按标准估计，有

$$\|\theta(t)\|\leq\int_0^t\|\rho_t\|ds\leq Ch^2\int_0^t\|u_t\|_2ds,$$

这便完成了(29)的证明。

为了证明(30)，将(32)式中的第二个方程对t微分，然后令$\chi=\theta_t$，$\psi=\varepsilon$，把两式相加得到

$$(33)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varepsilon\|^2+\|\theta_t\|^2=-(\rho_t,\theta_t)\le\frac{1}{2}\|\rho_t\|^2+\frac{1}{2}\|\theta_t\|^2.$$

现在注意到，由于$\theta(0)=0$，则有$\varepsilon(0)=0$。由(33)对t积分以及ρ_t的标准估计，可得

$$\|\varepsilon(t)\|^2\le\int_0^t\|\rho_t\|^2 ds\le Ch^4\int_0^t\|u_t\|_2^2 ds,$$

此式与(31)结合即可证(30)，从而定理证毕。

现在来讨论齐次方程的某些误差估计，我们从光滑初值的估计开始，象在第三章里那样，将用到空间$\dot{H}^s(\Omega)$。

定理3. 设(u_h,σ_h)和(u,σ)是相应于(25)和(24)的齐次方程($f=0$)的解，并且$V_h=P_1V$，则对于$t\geq 0$有

$$\|u_h(t)-u(t)\|\le Ch^2\|V\|_2,\quad 当 V\in\dot{H}^2(\Omega)时,$$

和

$$\|\sigma_h(t)-\sigma(t)\|\le Ch^2\|V\|_3,\quad 当 V\in\dot{H}^3(\Omega)时。$$

证明 根据引理5以及表示式(26)和(27)，第一个估计可由第三章的定理1立即推出。对于第二个估计，注意到

$$\|u(t)\|_3\le C\|V\|_3$$

和(用第三章的记号)

$$\int_0^t\|u_t\|_2^2 ds\le C\int_0^t\|u\|_4^2 ds\le C\int_0^t\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^4 e^{-2\lambda_j s}(V,\varphi_j)^2 ds$$

$$\le C\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^3(V,\varphi_j)^2\le C\|V\|_3^2,$$

则可由上面的定理2得到。定理证毕。

我们用证明齐次方程的一个非光滑初值的估计来结束这一章。

定理4. 设 (u_h, σ_h) 和 (u, σ) 是相应于(25)和(24)的齐次方程($f=0$)的解，并且 $V_h = P_0 V$，则对于 $t>0$，有

(34) $\|u_h(t)-u(t)\| \le Ch^2 t^{-1} \|V\|$,

和

(35) $\|\sigma_h(t)-\sigma(t)\| \le Ch^2 t^{-3/2} \|V\|$.

证明 由第三章的定理3和4，对于 $j \ge 0$，有

$$\|D_t^j(u_h(t)-u(t))\| \le Ch^2 t^{-1-j} \|V\|, \quad t>0.$$

(34)式是此式 $j=0$ 的特殊情形。为了证明(35)，再次利用由(28)定义的椭圆投影 $(\tilde{u}_h, \tilde{\sigma}_h)$。象在定理2的证明中那样，我们有

$$(\theta_t, \theta) + \|\varepsilon\|^2 = -(\rho_t, \theta),$$

于是有

(36) $\|\varepsilon\|^2 \le (\|\rho_t\| + \|\theta_t\|)\|\theta\|$.

这里

$$\|\theta(t)\| \le \|u_h(t)-u(t)\| + \|\rho(t)\| \le Ch^2 t^{-1} \|V\|,$$

$$\|\rho_t(t)\| \le Ch^2 \|u_t(t)\|_2 \le Ch^2 t^{-2} \|V\|,$$

和

$$\|\theta_t(t)\| \le \|D_t(u_h(t)-u(t))\| + \|\rho_t(t)\| \le Ch^2 t^{-2} \|V\|,$$

所以(36)表明

$$\|\varepsilon(t)\| \le Ch^2 t^{-3/2} \|V\|.$$

其次由(31)有

$$\|\tilde{\sigma}_h(t)-\sigma(t)\| \le Ch^2 \|u(t)\|_3 \le Ch^2 t^{-3/2} \|V\|,$$

这便完成了(35)式的证明，从而定理证完。

如同定常问题的情形，上述误差估计加细之后，可以推出对于 $u_h(t)$ 的几乎最佳阶的最大模误差估计。相应于定理2，3，和4的在一致度量意义下的这些误差界都是由 $\sigma_h(t)$

的误差界，乘以因子$\log\frac{1}{h}$得到的。例如，相应于定理 4 的一致估计是

$$\|u_h(t)-u(t)\|_{L^\infty}\leq Ch^2\log\frac{1}{h}t^{-3/2}\|V\|.$$

这里，我们就不详细叙述了。

参 考 文 献

上面所讨论的混合法，是Raviart和Thomas在〔1〕中对于多角形域上的定常问题引进的，并且后来，例如在〔2〕中，作了进一步研究的混合法族中的一个特例。这里的分析及其对于抛物问题的应用是取自〔3〕，那里还用于定常和非定常的Stokes方程。上面引理 1 的证明中所用到的Bramble—Hilbert引理，其证明可参见〔4〕。

1. P. A. Raviart and J. M. Thomas, A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, Proc. of the Sympcsium on the Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Rome, December, 1975, Springer Lecture Notes in Mathematics 606, pp. 292—315, Berlin, Heidelberg, New York (1977).
2. R. S. Falk and J.E.Osborn, Error estimates for mixed methods, RAIRO, Anal. Numér. 14, 249—277(1980).
3. C. Johnson and V. Thomée, Error estimates for some mxied finite element methods for parabolic type problems, RAIRO, Anal. Numér. 15, 41—78(1981).
4. P. G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North Holland, Amsterdam(1978).

第十四章　一个奇型问题

在这一章里，我们考虑奇型抛物方程

(1)　$$u_t - u_{xx} - \frac{2}{x}u_x + q(x)u = f(x),\quad x \in I = (0, 1),$$

$$t \geqslant 0,$$

它带有边值和初值条件

(2)　$$u_x(0, t) = u(1, t) = 0,\quad t \geqslant 0,$$

$$u(x, 0) = V(x),\quad x \in I,$$

同时，作为准备，还考虑相应的定常问题

(3)　$$-u'' - \frac{2}{x}u' + qu = f,\ \text{于}I\text{内},$$

$$u'(0) = u(1) = 0.$$

在上述的两个方程中，q 是 I 上的一个光滑、有界且非负的函数。这种问题是会在三维球对称问题中出现的。例如，若 u 是下述问题的解

$$u_t - \Delta u + qu = f,\ \text{于}B \times [0,\ \infty)\text{内},$$

$$u = 0,\ \text{在}\partial B \times [0,\ \infty)\text{上},$$

$$u(\cdot,\ 0) = V,\ \text{于}B\text{内},$$

其中 B 为单位球 $B_1(0) \subset R^3$，q, f 和 V 只依赖于 $|x|$。通过极坐标变换，此问题可以化成(1)、(2)的形式，这里 x 代表径向坐标。注意，若 $u \in C^2(\bar{I})$ 和满足(3)中的微分方程，并且 f 在 $x = 0$ 点处是有界的，则 $x = 0$ 处的边值条件是自动满足的。事实上，不难知道，如果 $u \in C^2(I)$，u 和 f 在 O 点附近有界，则上述论断成立。

我们将讨论解上述问题的那样的近似方法，这个方法利用属于S_h的空间变量函数作为近似函数，S_h是由在I上连续且在每个子区间$I_j=(x_{j-1},x_j)$上为次数不超过$r-1$的多项式的函数所构成的函数空间。这里$x_j=jh; j=1,\cdots, M, h=1/M$，$r\geqslant 2$。

我们首先讨论定常问题(3)。这个问题的一个自然的变分陈述是来自将方程写成如下形式

$$-(x^2u')'+x^2q(x)u=x^2f，于I内。$$

由此可以看出，(3)的一个解也是问题

$$A(u,\varphi)=\int_0^1(x^2u'\varphi'+x^2qu\varphi)dx=(x^2f,\varphi)，\quad\forall\varphi\in\dot{H}^1$$

的解，这里，$\dot{H}^1$代表H^1中于$x=1$点取0值的函数作成的空间，$(\cdot,\cdot)$代表通常的L_2内积。因此，我们可设立离散定常问题：求$u_h\in S_h$，使得

$$(4)\qquad A(u_h,\chi)=(x^2f,\chi)，\quad\forall\chi\in S_h.$$

容易看出，$A(0,0)$是$\dot{H}^1$上的一个正定，对称双线性形式，$S_h\subset\dot{H}^1$。特别地，对于给定的f，离散问题(4)在S_h中存在唯一解。

首先。我们建立一个简单的Poincaré型不等式。

引理1. 若$\alpha\geqslant 0$和$d>0$，则

$$\|x^\alpha V\|_{L_2(0,d)}\leqslant d\|x^\alpha V'\|_{L_2(0,d)}，当V(d)=0时。$$

证明. 对于$x\in[0,d]$，有

$$|x^\alpha V(x)|=|x^\alpha\int_x^d s^{-\alpha}s^\alpha V'(s)ds|$$

$$\leqslant\|x^\alpha V'\|_{L_1(0,d)}\leqslant d^{1/2}\|x^\alpha V'\|_{L_2(0,d)},$$

积分此式立即得到引理的结果。

特别地，若取$\alpha=d=1$。则引理1蕴含着$A(\cdot,\cdot)$在$\dot{H}^1$上关于模$\|xu'\|$是连续的。这是由于

$$A(u,V)\le\|xu'\|\|xV'\|+\|q\|_{L_\infty(I)}\|xu\|\|xV\|$$

$$\le(1+\|q\|_{L_\infty(I)})\|xu'\|\|xV'\|.$$

其中$\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_2(I)}$。

现在可以证明(4)的如下误差估计。

定理1。 在前面的假设下，对于(4)和(3)的解u_h和u，有

$$\|x(u_h-u)\|\le Ch^r\|xu^{(r)}\|.$$

证明。 令$e=u_h-u$，我们将直接从变分陈述来证明

$$\|xe'\|\le Ch^{r-1}\|xu^{(r)}\|. \tag{5}$$

然后，通过一个对偶论证给出

$$\|xe\|\le Ch\|xe'\|. \tag{6}$$

这些不等式合起来即证得定理。

为了证明(5)式，我们注意到，由定义，

$$A(u_h,\chi)=(x^2f,\chi)=A(u,\chi),\quad\forall\chi\in S_h,$$

所以

$$A(e,\chi)=0\quad\forall\chi\in S_h. \tag{7}$$

由于q是非负的，故有

$$\|xe'\|^2\le A(e,e)=A(e,\chi-u)\le c\|xe'\|\|x(\chi-u)'\|,$$

从而

$$\|xe'\|\le C\inf_{\chi\in S_h}\|x(\chi-u)'\|.$$

现在，我们把χ选作为u在S_h上的如下插值函数$\tilde{u}_h$，$\tilde{u}_h$在每个区间I_j($j=2,\cdots,M$)上局部地由下列方程定义

$$\tilde{u}_h(x_j+kh/(r-1))=u(x_j+kh/(r-1)),$$

$$k=0,\cdots,r-2;j=1,\cdots,M-1,$$

$$\tilde{u}_h(1)=u(1),$$

另外在第一个区间I_1上满足

$$\tilde{u}_h^{(k)}(x_1-0)=u^{(k)}(x_1),\quad k=0,\cdots,r-1。$$

显然，上述条件唯一地确定u_h，并有

$$\|(\tilde{u}_h-u)'\|_{L_2(I_j)}\leq Ch^{\bar{r}-1}\|u^{(\bar{r})}\|_{L_2(I_j)},\quad j=1,\cdots,M。$$

于是，除掉第一个区间外，有

$$\|x(\tilde{u}_h-u)'\|_{L_2(I_j)}\leq Ch^{\bar{r}-1}x_jx_{j-1}^{-1}\|xu^{(\bar{r})}\|_{L_2(I_j)}$$

$$\leq Ch^{\bar{r}-1}\|xu^{(\bar{r})}\|_{L_2(I_j)},\quad j=2,\cdots,M。$$

对于第一个区间，通过反复利用引理1，可得

$$\|x(\tilde{u}_h-u)\|'_{L_2(I_1)}\leq h\|x(\tilde{u}_h-u)''\|_{L_2(I_1)}\leq\cdots$$

$$\leq h^{\bar{r}-1}\|xu^{(\bar{r})}\|_{L_2(I_1)},$$

由此可以结论

$$\inf_{\chi\in S_h}\|x(\chi-u)'\|\leq\|x(\tilde{u}_h-u)'\|\leq Ch^{\bar{r}-1}\|xu^{(\bar{r})}\|,$$

这就完成了(5)式的证明。

现在来证明(6)式。令ψ是下述问题的解，

$$(8)\qquad -\psi''-\frac{2}{x}\psi'+q\psi=\varphi,\quad 于I内,$$

$$\psi'(0)=\psi(1)=0,$$

其中φ是一个给定的在0点附近取0值的光滑函数。由于(8)可以解释成一个三维球对称椭圆问题，所以可假定ψ在$\bar{I}$上是光滑的。利用正交性(7)，我们有

$$|(x^2e,\varphi)|=|A(e,\psi)|=|A(e,\psi-\chi)|$$

$$\leq C\|xe'\|\|x(\psi-\chi)'\|,\quad \forall\chi\in S_h。$$

若$\tilde{\psi}_h$是ψ的一个分段线性插值，与前面类似地有

$$\|x(\tilde{\psi}_h-\psi)'\|\leq Ch\|x\psi''\|。$$

这里我们将证明

$$(9)\qquad \|x\psi''\|\leq C\|x\varphi\|。$$

暂且假定此式成立，则可以结论

$$|(x^2e,\varphi)|\leq Ch\|xe'\|\|x\varphi\|,$$

由此立即可知(6)式成立。

剩下的就是证明(9)了。由(8)，

$$\|x\psi''\|\leq C(\|\psi'\|+\|x\psi\|+\|x\varphi\|).$$

根据引理1和(8)，我们有

$$\|x\psi\|^2\leq A(\psi,\psi)=(x^2\varphi,\psi)\leq\|x\varphi\|\|x\psi\|,$$

于是

$$\|x\psi\|\leq\|x\varphi\|. \tag{10}$$

如果我们能证明

$$\|\psi'\|\leq C\|x\varphi\|$$

则可完成(9)的证明。用$-x\psi'$乘(8)中的方程并积分，我们得到

$$(x\psi'',\psi')+2\|\psi'\|^2=-(x(\varphi-q\psi),\ \psi')$$
$$\leq(\|x\varphi\|+\|q\|_{L_\infty}\|x\psi\|)\|\psi'\|\leq C\|x\varphi\|\|\psi'\|,$$

最后一步用到了(10)式。这里，

$$(x\psi'',\psi')=[\frac{1}{2}x\psi'^2]_0^1-\frac{1}{2}\|\psi'\|^2\geq-\frac{1}{2}\|\psi'\|^2,$$

于是综合起来得到

$$\frac{3}{2}\|\psi'\|^2\leq C\|x\varphi\|\|\psi'\|$$

这就完成了(11)式的证明，从而定理得证。

现在来讨论依赖于时间的问题(1)，(2)。我们定义它的半离散近似：

$$(12)\quad(x^2u_{h,t},\chi)+A(u_h,\chi)=(x^2f,\chi),\ \forall\chi\in S_h,\ t\geq0,$$
$$u_h(0)=V_h.$$

显然，这个问题有唯一解。我们证明

定理2. 设u是(1),(2)的解，u_h为(12)的解，则

$$\|x(u_h(t)-u(t))\|\leq\|x(V_h-V)\|+ch^r\{\|xV^{(r)}\|+\int_0^t\|xu^{(r)}(s)\|ds\},\quad t\geq 0.$$

证明. 我们将按熟知的步骤证明。我们定义S_h上的一个椭圆投影P_A:

$$A(P_Au-u,\chi)=0,\quad\forall\chi\in S_h,$$

并令$u_h-u=(u_h-P_Au)+(P_Au-u)=\theta+\rho$.由定理1立即可得

$$\|x\rho(t)\|\leq Ch^r\|xu^{(r)}(t)\|\leq Ch^r\{\|xV^{(r)}\|+\int_0^t\|xu_t^{(r)}\|ds\}.$$

剩下的就是去找θ的一个恰当的估计。由于

$$(x^2\theta_t,\chi)+A(\theta,\chi)=-(x^2\rho_t,\chi),\quad\forall\chi\in S_h,$$

取$\chi=\theta$并利用$A(\cdot,\cdot)$的正定性，可得

$$\|x\theta\|\frac{d}{dt}\|x\theta\|=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x\theta\|^2\leq\|x\rho_t\|\|x\theta\|.$$

消去公因子并积分之，则得到

$$\|x\theta(t)\|\leq\|x\theta(0)\|+\int_0^t\|x\rho_t\|ds$$

$$\leq\|x(V_h-V)\|+Ch^r\{\|xV^{(r)}\|+\int_0^t\|xu_t^{(r)}\|ds\}.$$

综合以上估计即完成了定理的证明。

数值试验表明，用这个方法解上述奇型问题所得的近似解，在$x=0$附近的误差是比较大的。这是不奇怪的，因为在我们的变分陈述中，使用了权因子x^2，因此没有强调函数在原点附近的值。为了改善这种状况，使得误差的分布更均匀，我们现在考虑上述问题的另外一种弱陈述。

我们从定常问题开始，首先把问题写成如下形式

$$-xu'' - 2u' + xq(x)u = xf(x),\quad x \in I,$$

$$u^1(0) = u(1) = 0.$$

用φ乘方程两端，再在I上积分，并对第一项应用分部积分公式，即知(3)的解满足

$$(13)\ B(u,\varphi) = (xu',\varphi') - (u',\varphi) + (xqu,\varphi) = (xf,\varphi),$$

$$\forall \varphi \in \dot{H}^1.$$

这个变分陈述使用了一个非对称的双线性形式$B(\cdot,\cdot)$，但是它仍然是正定的。事实上，若$V(1)=0$，则有

$$B(V,V) = \|x^{1/2}V'\|^2 + \frac{1}{2}V(0)^2 + \|(xq)^{1/2}V\|^2.$$

现在可以定义离散问题：求$u_h \in S_h$使得

$$(14)\qquad B(u_h,\chi) = (xf,\chi),\quad \forall \chi \in S_h.$$

由$B(\cdot,\cdot)$的正定性，此离散问题存在唯一解u_h，并有

$$B(u_h - u,\ \chi) = 0,\quad \forall \chi \in S_h.$$

分析这个问题的最自然的模看来是$\|x^{1/2}V\| = (xV, V)^{1/2}$，这样可以期待误差在靠近原点的地方增加的不是那样显著。我们将直接推导出一个最大模的误差界，以代替用这种带权模从事的误差分析。为了叙述上的简单，我们把讨论限制在$r=2$的情形，也就是说，只考虑分段线性近似。更一般的结果可以在〔3〕中找到。

定理3. 设$r=2$，u和u_h分别是(3)和(14)的解。令$\|\cdot\|_{L_\infty} = \|\cdot\|_{L_\infty(I)}$，则有

$$\|u_h - u\|_{L_\infty} \le Ch^2\|u''\|_{L_\infty}.$$

证明. 令$e = u_h - u$。我们首先证明

$$(15)\qquad \|e\|_{L_\infty} \le Ch\|e'\|_{L_\infty},$$

然后再证

(16) $\qquad \|e'\|_{L_\infty}\le Ch\|u''\|_{L_\infty}.$

这两个估计合起来即证明了所要证的结果。

先来证明(15)式。对于给定的φ，令ψ是

(17) $\qquad -\psi''+q\psi=\varphi$，于$I$内，$\psi(0)=\psi(1)=0$

的解，则对于任意$\chi\in S_h$，有

$$(xe,\varphi)=(xe,-\psi''+q\psi)=((xe)'_x,\psi'_x)+(xqe,\psi)$$
$$=B(e,\psi)=B(e,\psi-\chi).$$

于是，如果令$\|\cdot\|_{L_1}=\|\cdot\|_{L_1(I)}$，则有

$$|(xe,\varphi)|\le C\|e'_x\|_{L_\infty}\{\|x(\psi-\chi)'_x\|_{L_1}+\|\psi-\chi\|_{L_1}\}.$$

我们将证明

(18) $\qquad \inf\limits_{\chi\in S_h}\{\|x(\psi-\chi)'\|_{L_1}+\|\psi-\chi\|_{L_1}\}\le Ch\|x\psi''\|_{L_1},$

和

(19) $\qquad \|x\psi''\|_{L_1}\le C\|x\varphi\|_{L_1}.$

综合以上估计可得

$$|(e,x\varphi)|\le Ch\|e'_x\|_{L_\infty}\|x\varphi\|_{L_1},$$

即(15)式得证。

为了证明(18)式，我们注意到，ψ在每个区间I_i上的标准分段线性插值$\widetilde{\psi}_h$满足

$$h\|(\psi-\widetilde{\psi}_h)'_x\|_{L_1(I_i)}+\|\psi-\widetilde{\psi}_h\|_{L_1(I_i)}\le Ch^2\|\psi''\|_{L_1(I_i)},$$

由此易知，对于除第一个区间以外的所有区间I_i有

(20) $$\|x(\psi-\widetilde{\psi}_h)'_x\|_{L_1(I_i)}+\|\psi-\widetilde{\psi}_h\|_{L_1(I_i)}$$
$$\le Ch\|x\psi''\|_{L_1(I_i)}.$$

在I_1上$\widetilde{\psi}_h$是由条件$\widetilde{\psi}_h^{(l)}(x_1-0)=\psi^{(l)}(x_1)$，$l=0,1$,

定义的，因此有

$$|(\psi-\tilde{\psi}_h)(x)|=\left|\int_x^h s\psi''(s)ds\right|\leq\|x\psi''\|_{L_1(I_1)}$$

积分之后得到

$$\|\psi-\tilde{\varphi}_h\|_{L_1(I_1)}\leq h\|x\psi''\|_{L_1(I)}\text{。}$$

类似地，有

$$|x(\psi_h'-\tilde{\psi}_h')(x)|=\left|x\int_x^h\psi''(s)ds\right|\leq\|x\psi''\|_{L_1(I_1)},$$

所以

$$\|x(\psi-\tilde{\psi}_h)_h'\|_{L_1(I_1)}\leq h\|x\psi''\|_{L_1(I_1)}\text{。}$$

这证明了(20)对于$i=1$成立，从而完成了(18)式的证明。

再来证明 (19) 式。我们注意到，若 用 G^x 表示(17)的Green函数，则有

$$\psi(x)=\int_0^1 G^x(s)\varphi(s)ds\text{。}$$

容易看到

$$|G^x(s)|\leq C(q)|s|,$$

于是

$$\|\psi\|_{L_\infty}\leq C\|x\varphi\|_{L_1}\text{。}$$

这样，由微分方程得

$$\|x\psi''\|_{L_1}\leq\|x\varphi\|_{L_1}+C\|x\varphi\|_{L_1}\leq c\|x\varphi\|_{L_1}\text{。}$$

这就证明了(19)式，从而完成(15)的证明。

为了证明(16)式，我们引进在S_h上的椭圆投影P_B：

(21) $$B(P_BV-V,\chi)=0,\quad\forall\chi\in S_h\text{。}$$

我们将证明

(22) $$\|(P_B V)'\|_{L_\infty} \leq C\|V'\|_{L_\infty}.$$

若(22)成立，取u_h是u的一个适当的插值，则有

$$\|e_h'\|_{L_\infty} = \|(P_B u - u)_h'\|_{L_\infty} = \|((P_B - I)(u - u_h))_h'\|_{L_\infty}$$

$$\leq C\|(u_h - u)_h'\|_{L_\infty} \leq Ch\|u''\|_{L_\infty}.$$

这就是(16)式。

为了证明(22)式，令$V_h = P_B V$。引进$B(\cdot,\cdot)$的主部

$$B_0(V, W) = (V_h', xW_h' - W),$$

并将(21)写成

(23) $$B_0(V_h, \chi) = B_0(V, \chi) - (xq(V_h - V), \chi),$$

$$\forall \chi \in S_h.$$

同时，我们引进试探函数的一组基底$\{\varphi_i\}_1^M$，其中

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} -h, & \text{当} x \leq x_{i-1}, \\ x - x_i, & \text{当} x_{i-1} < x < x_i, \\ 0, & \text{当} x \geq x_i. \end{cases}$$

并且令

$$V_h = \sum_{i=1}^{M} W_i \varphi_i$$

则立即可知

(24) $$\|V_h'\|_{L_\infty} = \max_i |W_i|,$$

所以，为了估计$\|V_h'\|_{L_\infty}$只需对每一个W_i找到适当的界。由(23)它们满足方程

(25) $$\sum_{i=1}^{M} W_i B_0(\varphi_i, \chi) = B_0(V, \chi) - (xq(V_h - V), \chi),$$

$$\forall \chi \in S_h.$$

我们将把方程中的χ选成是检验函数基底$\{\psi_i\}_1^M$中的元素。这里ψ_i是由下式定义的，

$$\psi_i(x)=\begin{cases}\varphi_i(x), & \text{当} x\geqslant x_{i-1}\text{时。}\\ -hx/x_{i-1}, & \text{当} 0\leqslant x\leqslant x_{i-1}\text{时。}\end{cases}$$

由简单计算可知，上述函数具有性质

$$B_0(\varphi_i,\psi_j)=\begin{cases}0. & \text{当} i\neq j\text{时，}\\ hx_i, & \text{当} i=j\text{时。}\end{cases}$$

事实上，当$i>j$时，由于φ'_i在ψ_j的支集上为零，故结论是显然的；当$i<j$时，由于$(x\psi'_j-\psi_j)$在$(0,\ x_{j-1})$上等于零，所以

$$B_0(\varphi_i,\psi_j)=\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x\varphi'_i-\varphi_i)dx=0.$$

最后，

$$B_0(\varphi_i,\psi_i)=\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x\varphi'_i-\varphi_i)dx=hx_i.$$

这样，在(25)中取$\chi=\varphi_j$，我们得到

$$\begin{aligned}|W_j hx_j|&=|B_0(V,\psi_j)-(xq(V_h-V),\psi_j)|\\ &\leqslant\|V'_h\|_{L_\infty}\|x\psi'_j-\psi_j\|_{L_1}+C\|V_h-V\|_{L_\infty}\|\psi_j\|_{L_1}\\ &=\|V'_h\|_{L_\infty}hx_j+C\|V_h-V\|_{L_\infty}hx_j/2,\end{aligned}$$

因此

$$|W_j|\leqslant\|V'_t\|_{L_\infty}+C\|V_h-V\|_{L_\infty}.$$

根据(24)和(15)，由此可得

$$\begin{aligned}\|V''_h\|_{L_\infty}&\leqslant\|V''_I\|_{L_\infty}+Ch\|V'_h-V'_I\|_{L_\infty}\\ &\leqslant C\|V''_I\|_{L_\infty}+Ch\|V'_h\|_{L_\infty}.\end{aligned}$$

由于h为小量，所以上式蕴含(22)。至此，(16)得证，从而完成了定理3的证明。

现在转向相应于非对称方法(14)的不定常模拟，亦即问题

$$(26)\quad (xu_{h,t},\chi)+B(u_h,\chi)=(xf,\chi),\quad \forall\chi\in S_h, t\geq 0,$$
$$u_h(0)=V_h,$$

其中$B(\cdot,\cdot)$仍然是由(13)定义的双线性形式。已知P_B是由(21)定义的椭圆投影，我们来证明如下结果。

定理4. 假定$r=2$，并假设u是(1)、(2)的解，u_h是(26)以$V_h=P_BV$为初值的解，则对于$t\geq 0$，

$$\|u_h(t)-u(t)\|_{L_\infty}\leq Ch^2(\log 1/h)^{1/2}\{\|u''(t)\|_{L_\infty}$$
$$+\|u''_t(0)\|_{L_\infty}+\int_0^t\|u''_{t}\|_{L_\infty}ds\}.$$

证明。 令

$$u_h-u=(u_h-P_Bu)+(P_Bu-u)=\theta+\rho,$$

由定理3已知

$$\|\rho(t)\|_{L_\infty}\leq Ch^2\|u''(t)\|_{L_\infty},$$

于是只剩下估计θ。由于$\theta\in S_h$，我们有

$$(27)\quad \|\theta\|_{L_\infty}\leq\|\theta'\|_{L_1}\leq C(\log 1/h)^{1/2}\|x^{1/2}\theta'_t\|.$$

事实上，利用S_h在I_1上维数有限的性质，有

$$\|\theta'\|_{L_1(0,h)}\leq C\|\theta'_{-}\|_{L_1(h/2,h)},$$

因此

$$\|\theta'_{-}\|_{L_1(0,1)}\leq C\|\theta'_{-}\|_{L_1(h/2,1)}\leq C\left(\int_{h/2}^1\frac{ds}{s}\right)^{1/2}\|x^{1/2}\theta\|$$
$$\leq C(\log 1/h)^{1/2}\|x^{1/2}\theta^1\|.$$

下面我们将证明

(28) $$\|x^{1/2}\theta_t'(t)\|\leq Ch^2\{\|u_t''(0)\|_{L_\infty}+\int_0^t\|u_{tt}''\|_{L_\infty}ds\}.$$

此与(27)结合便完成了定理的证明。

注意，由(26)，(1)的解的类似方程以及(21)，有

(29) $(x\theta_t,\chi)+B(\theta,\chi)=-(x\rho_t,\chi)$，$\forall\chi\in S_h$，$t\geqslant 0$。

取$\chi=\theta$，由此可得

$$\|x^{1/2}\theta'\|^2\leq B(\theta,\theta)\leq(\|x^{1/2}\theta_t\|+\|x^{1/2}\rho_t\|)\|x^{1/2}\theta\|,$$

因此，将引理1应用于最后一个因子之后，得到

$$\|x^{1/2}\theta_t'\|\leq\|x^{1/2}\theta_t\|+\|x^{1/2}\rho_t\|.$$

这里，再次利用定理3，得

$$\|x^{1/2}\rho_t(t)\|\leq\|\rho_t(t)\|_{L_\infty}\leq Ch^2\{\|u_t''(0)\|_{L_\infty}+\int_0^t\|u_{tt}''\|_{L_\infty}ds\}.$$

为了估计θ_t那项，将(29)式微分并令$\chi=\theta_t$，以得

$$(x\theta_{tt},\theta_t)+B(\theta_t,\theta_t)=-(x\rho_{tt},\theta_t),\quad t\geqslant 0.$$

由此得到

$$\|x^{1/2}\theta_t\|\frac{d}{dt}\|x^{1/2}\theta_t\|\leq\|x^{1/2}\rho_{tt}\|\|x^{1/2}\theta_t\|,$$

或者

$$\|x^{1/2}\theta_t(t)\|\leq\|x^{1/2}\theta_t(0)\|+\int_0^t\|x^{1/2}\rho_{tt}\|ds.$$

因为$\theta(0)=0$，由方程(29)并取$\chi=\theta_t$，得到

$$\begin{aligned}\|x^{1/2}\theta_t(0)\|^2&=-(x\rho_t(0),\theta_t(0))\\&\leq\|x^{1/2}\rho_t(0)\|\|x^{1/2}\theta_t(0)\|,\end{aligned}$$

于是

$$\|x^{1/2}\theta_t(0)\|\leq\|\rho_t(0)\|_{L_\infty}\leq Ch^2\|u_t''(0)\|_{L_\infty}.$$

最后，又由定理3，

$$\|x^{1/2}\rho_{tt}\| \leq \|\rho_{tt}\|_{L_\infty} \leq Ch^2\|u'_{tt}\|_{L_\infty}.$$

综合以上估计证明了(28)式，从而定理证毕。

在上面的结果中，初值V_h是选为V的椭圆投影。我们现在来证明，任意一个最佳阶的初始近似值都能产生出这样的离散解，它在最大模意义下和正的t是按几乎最佳阶收敛的。事实上，若$\tilde{u}_h$为定理4中的解，u_h是(26)带任意初值V_h的解，上述断言可由$\eta=u_h-\tilde{u}_h$的适当估计得到证实。由于η属于S_h，并且满足

$$(30)\qquad (x\eta_t,\chi)+B(\eta,\chi)=0,\quad \forall\chi\in S_h,$$
$$\eta(0)=V_h-P_BV,$$

所期望的估计是下述引理的一个推论。

引理2. 设η是(30)的解，则

$$\|\eta(t)\|_{L_\infty} \leq Ct^{-1/2}\log 1/h\|x^{1/2}\eta(0)\|,\quad t>0.$$

证明. 由(27)，引理的结果可由

$$\|x^{1/2}\eta(t)\| \leq ct^{-1/2}(\log 1/h)^{1/2}\|x^{1/2}\eta(0)\|$$

导出。现在就来证明此估计式。我们有

$$(31)\qquad \|x^{1/2}\eta'\|^2 \leq B(\eta,\eta)=-(x\eta_t,\eta)$$
$$\leq \|x^{1/2}\eta_t\|\|x^{1/2}\eta\|.$$

由(30)立即可知

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x^{1/2}\eta\|^2+B(\eta,\eta)=0,$$

故有

$$(32)\qquad \|x^{1/2}\eta(t)\|^2+2\int_0^t B(\eta,\eta)ds=\|x^{1/2}\eta(0)\|^2,$$

特别地，由此可以得到(31)右端第二个因子的界。于是，通

过证明

(33) $$\|x^{1/2}\eta_t(t)\|\leq Ct^{-1}\log 1/h\|x^{1/2}\eta(0)\|$$

即可完成引理的证明。为此，我们需要$B(\cdot,\cdot)$在 S_h 上的有界性。或者，更确切的说，

(34) $$\begin{aligned}|B(\chi,\zeta)|&=|(x\chi',\zeta')-(\chi',\zeta)+(xq\chi,\zeta)|\\&\leq C\log 1/hB(\chi,\chi)^{1/2}B(\zeta,\zeta)^{1/2},\\&\forall\chi,\zeta\in S_h,\end{aligned}$$

此式之所以成立，可由如下考察得到：由(27)可得估计式

$$\|(\chi',\zeta)\|\leq\|\chi'\|_{L_1}\|\zeta\|_{L_\infty}\leq C\log 1/h\|x^{1/2}\chi'\|\|x^{1/2}\zeta'\|.$$

现在我们继续(33)的证明。由(30)，我们有

(35) $$\frac{d}{dt}(t^2\|x^{1/2}\eta_t\|^2)+2t^2B(\eta_t,\eta_t)=2t\|x^{1/2}\eta_t\|^2.$$

利用(34)，有

$$\|x^{1/2}\eta_t\|^2=-B(\eta,\eta_t)\leq C\log\frac{1}{h}B(\eta,\eta)^{1/2}B(\eta_t,\eta_t)^{1/2},$$

由此可得

$$2t\|x^{1/2}\eta_t\|^2\leq 2t^2B(\eta_t,\eta_t)+C(\log\frac{1}{h})^2B(\eta,\eta),$$

于是由对(35)积分并利用(32)，得到

$$\begin{aligned}t^2\|x^{1/2}\eta_t\|^2&\leq C(\log 1/h)^2\int_0^t B(\eta,\eta)ds\\&\leq C(\log 1/h)^2\|x^{1/2}\eta(0)\|^2.\end{aligned}$$

这就完成了引理的证明。

参 考 文 献

定理1中带权模的误差估计取自[1]。关于同一问题的一个最大模估计可在[2]中找到。上述分析的其余部分见[3]，那里的结果是按最一般情形给出的。

1. R. S. Schreiber and S. C. Eisenstat, Fniəti əelenmt methods for spherically symmetric elliptic equations. SIAM J. Numer, Anal. 18, 546—558(1981).

2. D. Jespersen, Ritz-Galerkin methods for singular boundary value problems. SIAM J. Numer. Anal. 15, 813—834(1978).

3. K. Eriksson and V. Thomée, Galerkin methods for singular boundary value problems in one space dimension. Math. Comput. 42(1984).

[General Information]
书名=一般线性偏微分方程
作者=陈庆益
页数=253
SS号=10069681
DX号=
出版日期=1987年04月第1版
出版社=高等教育出版社